

ShahinComputer.ir

فصل اول

تابع

تمرین صفحه ۴۲

(۱) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$1) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$D_f = R \quad x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \text{حل:}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 21}}$$

$$x^2 - 5x + 21 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} + \frac{59}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{59}{4} > 0 \Rightarrow D_f = R \quad \text{حل:}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$D_f = (\mathbf{0}, +\infty) \quad \text{حل:}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}} \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$$

$$5) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 2}} \Rightarrow x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}$$

$$= (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow D_f = R$$

$$6) \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_f = R - \{\mathbf{0}\}$$

$$7) \quad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = (\mathbf{0}, +\infty)$$

$$8) \quad f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 + 2x + 1)(-x^2 + x - 1)}{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2(-x^2+x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$$(x+1)^2 \geq 0 \quad , \quad -x^2 + x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \text{صورت کسر} \leq 0$$

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $x < 3$

$$\Rightarrow D_f = (2, 3)$$

$$9) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5 + 6} \quad \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

$$10) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \quad \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$$

$$11) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x - |x|}} \quad \Rightarrow x \neq |x| \Rightarrow x < 0 \quad \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

$$12) \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

(2) دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ R_f = \{-1, 1\}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \quad \Rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow R_f = R - \{0\}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x-1}{x-1} \quad \Rightarrow D_f = R - \{1\}, R_f = \{1\}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} -x + 3 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, +\infty)$$

چون تابع روی $[-\infty, 1]$ صعودی است برد در این قسمت برابر $[-\infty, 1]$ است و

ShahinComputer.ir

٤ حل المسائل رياضي عمومي (١)

و چون تابع روی $(1, +\infty)$ نزولي است برد در اين قسمت برابر

$$(-\infty, -1+3) = (-\infty, 2)$$

است. پس برد تابع اجتماع اين دو مجموعه است که برابر مجموعه زير است:

$$R_f = (-\infty, 2)$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

$$R_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$6) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow D_f = R - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x + 2$$

$$R_f = R - \{4\}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} -x + 5 & x > 4 \\ -\sqrt{16 - x^2} & -4 < x < 4 \\ x + 5 & x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{4\}$$

$$f_1 = -x + 5, \quad x > 4 \Rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 1)$$

$$f_2 = -\sqrt{16 - x^2}, \quad -4 < x < 4 \Rightarrow R_f = [-4, 0]$$

$$f_3 = x + 5, \quad x \leq -4 \Rightarrow R_f = [0, -\infty, 1]$$

$$\Rightarrow R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} = (-\infty, 1) \cup [-4, 0] = (-\infty, 1)$$

$$8) \quad f(x) = \sqrt{x - |x|}$$

چون همواره داريم $x - |x| \leq 0$ در نتيجه $x - |x| = 0$ پس جاهایی که $x = 0$ است قابل

قبول است يعني $D_f = [0, +\infty]$.

$$x \in D_f \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(3) از جفت توابع زير کدام يك مساوي هستند؟

$$f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1 \quad (1)$$

مساوی نیستند چون $D_f = R - \{\mathbf{0}\}$ و $D_g = R$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \text{ و } g(x) = x \quad (2)$$

مساوی نیستند چون $D_f = [\mathbf{0}, +\infty)$ و $D_g = R$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ و } g(x) = x + 2 \quad (3)$$

فرض کنید $f(x^2 - 1)$ و $f(x+1)$ مطلوب است. $f(x) = \sqrt{x-1}$ (4)

$$\cdot f(f(2))$$

$$f(1) = \sqrt{1-1} = \mathbf{0}$$

$$f(x+1) = \sqrt{x+1-1} = \sqrt{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

$$f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

$$f(f(2)) = f(\sqrt{2-1}) = f(1) = \mathbf{0}$$

. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اگر f تابعی باشد که به ازای هر x و y . (5)

اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1) \neq \mathbf{0}$ باشد. مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را باید.

حل :

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1+1+1+\dots+1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) \\ &= n \cdot f(1) \\ \Rightarrow \frac{f(n)}{f(1)} &= \frac{nf(1)}{f(1)} = n \end{aligned}$$

در هر یک از موارد gog , fof , gof , fog , $\frac{f}{g}$, $f+g$ را تعیین کنید. (6)

٦

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\cdot g(n) = x^2 + 1 , \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{الف})$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$got(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$fof(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$gog(x) = g(g(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x} , \quad g(x) = 4 - x^2 \quad (\text{بـ})$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + 4 - x^2$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{4 - x^2}$$

$$fog(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$gof(x) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$$

$$fof(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$gog(x) = 4 - (4 - x^2)^2 = 4 - (16 - 8x^2 + x^4) = -4 + 8x^2 - x^4$$

$$\cdot f(x) = \frac{x+1}{x-1} , \quad g(x) = \frac{1}{x} (\zeta$$

$$f + g(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

$$gof(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$fof(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{2}$$

$$gog(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$\cdot f(x) = x^2 , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (\zeta$$

$$f + g(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$gof(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$fog(x) = (\sqrt{x})^2 = x^4$$

$$gog(x) = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{1} = \frac{1}{x}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١) ٨

(٧) در هر مورد $f - g$ و fg را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$fg(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ 16 & x \geq 0 \end{cases} \quad f - g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{بـ})$$

$$\text{حل: ابتدا } f(x) \text{ می نویسیم، داریم:} \\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

$$, f - g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{پـ})$$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت 1 داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x < 1 \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

{S

(ج

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 4 & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < -1 \\ x^2 + 1 & -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x+2} & 2 < x \end{cases}$$

حل: دامنه مشترک دو تابع برابر $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ است پس داریم:

$$f - g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - \frac{1}{x} & x < -1 \\ 4 - \sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)}{x} & x < -1 \\ 4\sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

(8) توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$f : R - \{3\} \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$g : R - \{1\} \rightarrow R$$

$$g(x) = \frac{3-8x^3}{1-x^3}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow ^3 \sqrt{\frac{x_1+3}{x_1-3}} = ^3 \sqrt{\frac{x_2+3}{x_2-3}} \\
 &\Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3} = \frac{x_2+3}{x_2-3} \Rightarrow 1 + \frac{6}{x_1-3} = 1 + \frac{6}{x_2-3} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x_1-3} = \frac{1}{x_2-3} \Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \\
 &\Rightarrow x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً آیا f و g وارون یکدیگرند.

حل: باید $D_g = R_f$ و $D_f = R_g$ باشد.

$$\begin{aligned}
 y = f(x) = ^3 \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} &\Rightarrow y^3 = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3} \\
 &\Rightarrow y^3 - 1 = \frac{6}{x-3} \Rightarrow x-3 = \frac{6}{y^3-1} \\
 &\Rightarrow x = 3 + \frac{6}{y^3-1} = \frac{3y^3-3+6}{y^3-1} \\
 &\Rightarrow x = \frac{3y^3+3}{y^3-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x^3+3}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

با این محاسبه مشخص است که $g(x) \neq f^{-1}(x)$ است.

(٩) کدام یک از توابع زیر یک به یک و پوشان است؟

$$f(x) = \frac{|x|+1}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & x > 0 \\ -\frac{x+1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

حل) این تابع به صورت

هر جزء این تابع یک و پوشاست، چون تابع هموگرافیک است.

$$f : R^+ \rightarrow R \quad , \quad f(x) = |x| + 1 \quad (2)$$

حل: این تابع به صورت $f(x) = x + 1$ است که یک به یک است.

ولی پوشانیست چون $R_f = (1, +\infty) \neq R$ است.

$$f : R \rightarrow R \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + 2 \quad (3)$$

حل: این تابع یک به یک است چون:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x_1 + 2} &= \sqrt[3]{x_2 + 2} \quad \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2} \\ \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

این تابع پوشانیز است چون:

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} + 2 \quad \Rightarrow \quad y - 2 &= \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad x = (y - 2)^3 \\ &\Rightarrow R_f = R \end{aligned}$$

$$f : R - \{1\} \rightarrow R \quad , \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad (4)$$

حل: تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ روی دامنه اش حتماً یک به یک است.

این تابع پوشانیست. چون:

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} \\ \Rightarrow \quad \frac{3}{x-1} &= y-2 \Rightarrow x-1 = \frac{3}{y-2} \\ \Rightarrow x &= 1 + \frac{3}{y-2} = \frac{y+1}{y-2} \\ R_f &= R - \{2\} \neq R. \end{aligned}$$

تابع $f : R - \{1\} \rightarrow R - \{a\}$ با خواص زیر داده شده است:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x_1-1} \\ f(x) = f(x_2) &\Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1-1} = 2 + \frac{1}{x_2-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_1-1} &= \frac{1}{x_2-1} \quad \Rightarrow \quad x_1-1 = x_2-1 \\ \Rightarrow \quad x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشایش داشد.

حل: باید $\{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا $R_f = R - \{a\}$ را به صورت زیر می‌باییم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = y-2 \\ &\Rightarrow x-1 = \frac{1}{y-2} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-2} \\ \Rightarrow R_f &= R - \{2\} \quad \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

(۱۱) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \quad (\text{الف})$$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$\begin{aligned} y = \frac{3x+2}{x-1} &\Rightarrow yx - y = 3x + 2 \Rightarrow x(y-3) = y+2 \\ &\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{x-4} \quad (\text{ب})$$

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x-4} &\Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2 + 4 \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & 9 < x \end{cases} \quad (\text{ج})$$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون پذیر است:

$$f_1(x) = x, \quad x > 1 \Rightarrow f_1^{-1}(x) = x \quad x > 1$$

$$f_2(x) = x^2, \quad 1 \leq x \leq 9 \Rightarrow f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad 1 \leq x \leq 81$$

$$f_3(x) = 27\sqrt{x}, \quad x > 9 \Rightarrow f_3^{-1}(x) = \frac{x^2}{(27)^2} \quad x > 81$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 & x > 81 \end{cases}$$

فصل دوم

حد و پیوستگی

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید. پس آنها را روی یک خط نشان

دهید.

(الف) $N(1, \frac{1}{2}) = \left\{ x \mid |x - 1| < \frac{1}{2} \right\}$

(ب) $N(0, 3) = \left\{ x \mid |x| < 3 \right\}$

(ج) $N'(1, 3) = \left\{ x \mid |x - 1| \leq 3 \right\}$

(د) $N'(1, 5) = \left\{ x \mid |x - 1| \leq 5 \right\}$

(۲) مجموعه $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 1 \right\}$ یک همسایگی متقارن به شعاع r است. a و r را

تعیین کنید.

حل:

$$|2x + 3| = 2 \left| x + \frac{3}{2} \right| = 2 \left| x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}$$

مجموعه $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |3x - 1| < |x + 1| \right\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به

شعاع r است. a و r را تعیین کنید:

حل:

$$|3x - 1| < |x + 1| \Rightarrow \frac{|3x - 1|}{|x + 1|} < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3x - 1}{x + 1} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{3x - 1}{x + 1} < 1$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow -1 < 3 \frac{-4}{x+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad 3 - \frac{4}{x+1} < 1 \\
 & \Rightarrow 2 < \frac{4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{2}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-x}{x+1} \\
 & \Rightarrow -1 < x < 1 \\
 & -1 < 3 - \frac{4}{x+1} - 4 < \frac{-4}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1} < 1 \\
 & \Rightarrow \frac{1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-x}{x+1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \\
 & (-1, 1) \text{ U } (-1, 0) = (-1, 1) \\
 & \text{جواب} = a = 0, \quad r = 1
 \end{aligned}$$

اگر $(2a-4, a+2)$ یک همسایگی متقارن 5 باشد. شاعر همسایگی را تعیین کنید:

: حل

$$\begin{aligned}
 N(5, 7) &= (2a-4, a+2) \\
 \Rightarrow (5-7, 5+r) &= (2a-4, a+2) \\
 \Rightarrow \begin{cases} 5-r = 2a-4 \\ 5+r = a+2 \end{cases} &\Rightarrow 10 = 3a-2 \Rightarrow a = 4 \\
 &r = 1
 \end{aligned}$$

یک همسایگی a به شاعر 4 است. $A = \{x \in R \mid |2x+3| < 6\}$ (5 مجموعه

a و r را تعیین کنید:

$$\begin{aligned}
 |2x+3| < 6 \Rightarrow 2 \left| x + \frac{3}{2} \right| < 6 \quad \Rightarrow \quad \left| x + \frac{3}{2} \right| < 3 \\
 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad r = 3
 \end{aligned}$$

تمرین ٦-٢-٢ صفحه ٦٣

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 4) &= 9 & |5x + 4 - 9| &= 5|x - 1| < 4 \\ && \Rightarrow |x - 1| &< \frac{4}{5} \end{aligned}$$

پس قرار می‌دهیم $d \leq \frac{e}{5}$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3x + 2) = -4$$

$$|3x + 2 + 4| = 3|x + 2| < 4 \Rightarrow |x + 2| < \frac{4}{3}$$

قرار می‌دهیم $d \leq \frac{e}{3}$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2|$$

ماکریم $|x + 2|$ را در همسایگی $1 < x - 2 < 1$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} -1 < x - 2 < 1 &\Rightarrow 1 < x < 3 &\Rightarrow \max(x + 2) = 5 \\ \Rightarrow |x^2 - 4| &\leq 5|x - 2| < 4 \end{aligned}$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \quad |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

ماکریم $|x - 2|$ را در همسایگی زیر می‌یابیم.

$$-1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow \max|x-2|=3$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\left| \frac{3x+1}{x+2} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{9x+3-4x-8}{x+2} \right| = \frac{5|x-1|}{|x+2|}$$

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \max \frac{5}{|x+2|} = \frac{5}{2}$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{5x-8} = 3$$

$$\left| \frac{x^2+2}{5x-8} - 3 \right| = \left| \frac{x^2+2-15x+24}{5x-8} \right| = \frac{|x-13||x-2|}{|5x-8|}$$

$$-1 < x-2 < 1 \quad 1 < x < 3$$

ماکریم روى این بازه به علت صعوبت بودن برابر است با:

$$\left| \frac{3-13}{15-8} \right| = \left| \frac{-10}{7} \right| = \frac{10}{7}$$

پس کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{10}\right\}$ در نظر گرفته شود.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} = 1$$

$$\left| \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \left| \frac{x^2 - 3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} |x - 2|$$

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

تابع $x^2 - 3x + 3$ می‌بینیم خود را در $x = \frac{3}{2}$ دریافت می‌کند پس:

$$\max \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} = \frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 3} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

پس کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{4} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x < x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \leq 0$$

$$x < 0 \Rightarrow 1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x \Rightarrow x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 < -x \Rightarrow \left| x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 \right| < |x|$$

اگر $d \leq e$ باشد مسئله حل است.

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2 + 3} \right| = \frac{|x+3|}{x^2 + 3} |x-3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$\max \left\{ \frac{x+3}{x^2 + 3} \right\} = \frac{7}{4+3} = 1$$

پس کافی است $d \leq \min \{1, e\}$ در نظر گرفته شود.

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 10x) = -21$$

$$|x^2 - 10x + 21| = |x - 7| |x - 3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow \max|x - 7| = |4 - 7| = 3$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{e}{3}\right\}$ در نظر گرفته شود.

$$11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$$

$$\left| \frac{x^2 - 2}{x - 2} - 7 \right| = \left| \frac{x^2 - 2 - 7x + 14}{x - 2} \right| = \frac{|x - 4| |x - 3|}{|x - 2|}$$

$$-1 < x - 4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5$$

$$\max \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| = \left| \frac{5 - 3}{5 - 2} \right| = \frac{2}{3}$$

پس قرار می‌دهیم $d \leq \min\left\{1, \frac{3}{2}e\right\}$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{5x - 3} = \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{4x - 1}{5x - 3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{8x - 2 - 15x + 9}{5x - 3} \right| = \frac{7}{|5x - 3|} |x - 1|$$

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{7}{|5x - 3|} = \frac{7}{|0 - 3|} = \frac{7}{3}$$

پس $d \leq \min\left\{1, \frac{3}{7}e\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 0 \right| = |x - 2|$$

۸

حل المسائل رياضي عمومي (۱)

کافی است $d = e$ در نظر گرفته شود.

$$14) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} - \frac{1}{6} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \right| \\ &= \frac{|x-9|}{(\sqrt{x}+3)^2} \end{aligned}$$

$$-1 < x-9 < 1 \Rightarrow 8 < x < 10$$

$$\max \frac{1}{(\sqrt{x}+3)^2} = \frac{1}{(\sqrt{8}+10)^2}$$

کافی است $d \leq \min \{1, (\sqrt{8}+10)^2 e\}$.

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{x-3} = 2$$

$$\left| \frac{2}{x-3} - 2 \right| = \left| \frac{2-2x+6}{x-3} \right| = \frac{2|x-4|}{|x-3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x-4 < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$\max \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{\left| \frac{7}{2} - 3 \right|} = 4$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, e \right\} \text{ پس}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x-1} = 3$$

$$\left| \frac{2x+1}{2x-1} - 3 \right| = \left| \frac{2x+1 - 6x + 3}{2x-1} \right| = \frac{4}{|2x-1|} |x-1|$$

$$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \max \frac{4}{|2x-1|} = \frac{4}{\left|2\left(\frac{3}{4}\right)-1\right|} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{e}{8} \right\} \text{ پس}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{x-3} = 2$$

$$\left| \frac{x}{x-3} - 2 \right| = \left| \frac{x-2x+6}{x-3} \right| = \frac{|x-6|}{|x-3|}$$

$$-1 < x-6 < 1 \Rightarrow 5 < x < 7$$

$$\Rightarrow \max \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|5-3|} = \frac{1}{2}$$

$$d \leq \min\{1, 2e\} \quad \text{پس}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+3} = -1$$

$$\left| \frac{1}{x+3} + 1 \right| = \left| \frac{x+4}{x+3} \right| = \left| \frac{|x+4|}{|x+3|} \right|$$

$$-\frac{1}{2} \langle x+4 \rangle \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow -\frac{9}{2} \langle x \rangle \left(-\frac{7}{2} \right)$$

$$\max \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{\left| -\frac{9}{2} + 3 \right|} = \frac{2}{3}$$

$$d \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}e\right\} \quad \text{پس}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}} \right| = \left| \frac{(2 - \sqrt{5-x})(2 + \sqrt{5-x})}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})}$$

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{1}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} = \frac{1}{2\sqrt{5-2}(2 + \sqrt{5-2})}$$

$$d \leq \min\{1, (2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}))e\} \quad \text{پس}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$$

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x + 4} + 8 \right| = \left| \frac{x^2 - 16 + 8x + 32}{x + 4} \right| = \left| \frac{(x+4)^2}{x+4} \right|$$

$$= |x+4|$$

کافی است $d = e$

تمرین ۲-۳-۲۹ صفحه ۸۰

حدهای زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1} &= \lim \frac{(x^2 - x - 2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})} = \lim \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})} \\ &= \lim \frac{x-2}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{-1-2}{-1-\sqrt{-1+2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} &= \lim \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(x-4)} = \lim \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim \frac{(x-10)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim \frac{x-10}{x+2} = \frac{-11}{1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 19x - 20}{x^2 - 1} = \lim \frac{(x-1)(x+20)}{(x-1)(x+1)} = \lim \frac{x+20}{x+1} = \frac{21}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \lim \frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} = \lim \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{3}+3)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} \\ = \lim (\sqrt{x}+3)(x+9) = 108\{$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-x-6} = \lim \frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim \frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2}+1)} = \frac{1}{5 \times 2} = \frac{1}{10}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim \frac{(x+2)(x^2 - x + 2)}{(x^2 - 4)(x+2)} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 2}{x-2} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim \frac{3x+1}{x+1} = 2$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 4x + 3}{x^{15} - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - x - 3x + 3}{x^{15} - x - 4x + 4} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{19} - 1) - 3(x - 1)}{x(x^{14} - 1) - 4(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1) - 3)}{(x - 1)(x(x^{13} + x^{12} + \dots + x + 1) - 4)} \\
 & = \frac{19 - 3}{14 - 4} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1 + x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1 + x)}{(x^2 - 1)(x + 3)} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{2x(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x})} = \frac{3}{2}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{2}{3}$$

تمرین صفحه 106

حد هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} [x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$$

تابع حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} [2x + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [2x + 1] = 3$$

تابع حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x + 1] = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} [3 - 2x] = 3 + \lim_{x \rightarrow 1} [-2x] \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{5 - x} \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 2} = \frac{(-1)^1}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 2} = \frac{(-1)^0}{1 - 2} = \frac{1}{-2} = -1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - |2 - x| - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - (2 - x) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 4}{x - 2} = 2$$

$$8) \lim \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim \frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = \mathbf{0} \quad (\text{کراندار در حد صفر})$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) \quad \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x[x]}{2x + |x|} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{\mathbf{0}}{2x + x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{-4x}{2x - x} = -4$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^2} + \sqrt[4]{(x+1)} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{4}{3}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{8}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{\cos^3 x} - \sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}(\sqrt[6]{\cos x} - 1)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^0 x} + \dots + \sqrt[6]{\cos x} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^{\frac{2x}{2}}}{\sin^2 x} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) \frac{\sin(1-x)}{x-1} = -2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\Pi}{2} x$$

$$1-x = \quad \Rightarrow x = 1-t \quad \Rightarrow \quad = \lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{tg} \frac{p}{2}(1-t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \frac{p}{2} t$$

$$= \lim \frac{t}{\sin \frac{p}{2} t} \cdot \cos \frac{p}{2} t = \frac{2}{p}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg} \left(\frac{p}{4} - x \right) = 0 \times -1 = 0$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2} + x\right)^n - \left(1 + \frac{x^2}{2} - x\right)^n}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{x} = 2n$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 \right) = 2 - 2 = 0$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} ((-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}) = 0 \quad \text{(تابع کراندار در تابع با حد صفر ضرب شده)}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$= \sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

صفحة 127

$$27) \quad (a \neq 1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

$$28) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1| + 3(1-x^2)[x-1]}{x-1} \quad \text{حد وجود ندارد.}$$

$$29) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}, \cos \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$31) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \mathbf{0}$$

$$32) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-2}{|x-2| + [x-2]} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x-1)}{-(x-2)-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$33) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} = \mathbf{0}$$

$$34) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} Arcty \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Arcty \frac{1}{\mathbf{0}^+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Arcty(+\infty) = \frac{p}{2}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arctg} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arctg} \frac{1}{0^-} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} (-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arcos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{x}{2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{2\sin x \cos x} = -\frac{1}{4}$$

108 تمرین صفحه 32-4-2

ثبت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ (1)

حل: با توجه به نامساوی $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ و با استفاده از قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ است پس } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |f(0)|$$

(2) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=1$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 & , \quad x < 1 \\ [x] - a & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+4) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a) = 1 - a$$

$$\Rightarrow 1 - a = 7 \quad a = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , \quad x < -1 \\ x^2 - b & , \quad x \geq -1 \end{cases} \quad \text{فرض کنید} \quad (3)$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ که}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - b) = 1 - b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x < 3 \\ b - q & x > 3 \end{cases} \quad \text{فرض کنید: (4)}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = -15 \\ -2a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ -a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2b = -8$$

$$\Rightarrow b = -4 \quad a = -1$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \quad x \leq 1 \\ x + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 1 \\ x & , \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{فرض کنید (5)}$$

نشان دهید، این توابع در $x = 1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)g(x)$ در $x = 1$ حد دارد.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 \quad \Rightarrow \text{حد ندارد } f$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = \end{aligned} \Rightarrow \text{حد ندارد } g$$

تابع $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x).g(x) = \begin{cases} x^2(x^2 + 3) & , x \leq 1 \\ 2(x+1) & , x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2(x^2 + 3) = 4 \\ \Rightarrow \text{تابع حد دارد.} & \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x(x^2 - 2), \text{ مقدار } f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} \quad \text{فرض کنید (6)}$$

را حساب کنید.

$$\text{حل) چون } f(x^2 - 2) = 1 \text{ است. پس}$$

$$\lim \left(x f(x^2 - 2) \right) = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

(7) حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) \quad \text{(الف)} \\ \text{حل)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) &= 4 - 1 = 3 \\ \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \left([x] - \left[\frac{x}{4} \right] \right) &= 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

حد = ۳

$$\lim([3x] + [-3x]) \quad (ب)$$

حل) توجه کنید اگر $z \notin 3x + [-3x]$ آنگاه $-1 = [3x] + [-3x]$ پس حد برابر ۱ است.

(۸) در مورد تابع $f : R \rightarrow R$ می‌دانیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد.

همچنین ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x)$ وجود داشته باشد. برابر صفر است.

حل: نقطه دلخواه x_0 را در نظر بگیرید و فرض کنید $t > 0$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x_0) + f(t)) = f(x_0) + \mathbf{0}$$

پس $\lim f(x) = f(x_0)$ یعنی تابع در هر نقطه حد دارد.

در فوق از این نکته استفاده کردہایم که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \mathbf{0}$ می‌شود زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f\left(\frac{x}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(۹) فرض کنید $A \neq \mathbf{0}$ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ثابت کنید عددی مثبت مانند d وجود

دارد که هرگاه $d < |x - a| < d$ $\mathbf{0}$, آنگاه f وجود دارد که

$$\bullet < |x-a| < d \Rightarrow |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\|f(x)-A\| \leq |f(x)-A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|A|}{2} < |f(x)-A|$$

$$\Rightarrow \frac{|A|}{2} < |f(x)|$$

$$f(x) = \begin{cases} x - |x|, & |x| \\ x - |x+1|, & |x| \end{cases} \quad \text{فرض کنید} \quad (10)$$

آنها حد دارد.

حل) تابع f به صورت زیر قابل بیان است.

$$f(x) = \begin{cases} x - |x|, & |x| \\ x - |x+1| - 1, & |x| \end{cases}$$

این تابع در اعداد صحیح حد دارد. یعنی اگر $x_0 = x$ عدد صحیح باشد. اگر n زوج باشد

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow [x] = n \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n - n = \bullet$$

$$x \rightarrow x_0^- \Rightarrow [x] = n - 1 \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = n - (n - 1) - 1 = \bullet$$

مشابهًا اگر n فرد باشد. حد موجود است.

در اعداد غیر صحیح نیز این تابع حد دارد. چون در سمت راست یا چپ x_0 ، $[x]$ زوج یا

فرد باقی می‌ماند.

پس این تابع روی R حد دارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

فرض کنید. $A > B$. پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (11)

ثابت کنید عددی مثبت مانند وجود دارد که اگر $0 < |x - a| < d$ ، آنگاه

$$\therefore f(x) > \frac{A+B}{2}$$

حل) چون $e = \frac{A-B}{2}$ اگر قرار دهیم $A > B$ پس $A > B$ چون

حدود وجود دارد. پس $d > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| &\Rightarrow \left| f(x) - A < \frac{A-B}{2} \right| \\ &\Rightarrow -\frac{A-B}{2} < f(x) - A < \frac{A-B}{2} \\ &\Rightarrow \frac{A-B}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{A+B}{2} < f(x) \end{aligned}$$

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ را حساب کنید (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+|x|) = 1 \quad \text{حل) داریم:}$$

$$\text{پس طبق قضیه فشردگی } L = 1$$

7-5-2 تمرین صفحه 115

ب) استفاده از تعریف ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x \frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} = +\infty \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} > M \Rightarrow (x+1)^2 < \frac{2\sqrt{2}}{M} \Rightarrow |x+1| < \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$$

$$d \leq \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}} \quad \text{پس کافی است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{-3}{(x+2)^4} < -M &\Rightarrow \frac{-3}{(x+2)^4} > M &\Rightarrow (x+2)^4 < \frac{3}{M} \\ &\Rightarrow |x+2| < \sqrt[4]{\frac{3}{M}} \\ d \leq \sqrt[4]{\frac{3}{M}} &\quad \text{پس کافی است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2} > M &\Rightarrow \frac{5}{x-2} > M-2 &\Rightarrow x-2 < \frac{5}{M-2} \\ d \leq \frac{5}{M-2} &\quad \text{کافی است.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-4x}{x-4} = \frac{15+16-4x}{x-4} = -4 - \frac{15}{x-4} > M &\Rightarrow -\frac{15}{x-4} > M+4 \\ &\Rightarrow -\frac{15}{M+4} > x-4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} < -M &\Rightarrow \frac{6}{x-2} < -(3+M) \\ \Rightarrow -\frac{6}{x+M} < x-2 &\Rightarrow d = \frac{3}{3+M} \end{aligned}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} - 2 \right| &= \left| \frac{4x^2 - 5 - 4x^2 + 2}{2x^2 - 1} \right| = \left| \frac{3}{2x^2 - 1} \right| < e \\ \Rightarrow \frac{3}{e} &< 2x^2 - 1 \Rightarrow \frac{3+e}{2e} < x^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} &< x \end{aligned}$$

كافى است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2 \right| &= \frac{1}{x^2 + 1} < e \Rightarrow \frac{1}{e} < x^2 + 1 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} &< x \end{aligned}$$

كافى است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 8x) = +\infty \quad (9)$$

$$x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16 > M \Rightarrow x > \sqrt{M + 16} - 4$$

كافى است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= -(x-2)^2 + < -m \\ \Rightarrow M + 4 &< (x-2)^2 \\ \Rightarrow 2 + \sqrt{m+4} &< x \end{aligned}$$

پس $N > 2 + \sqrt{M+4}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right| &= \frac{2}{x^2 - 1} < e \Rightarrow \frac{2}{e} < x^2 - 1 \\ \Rightarrow \frac{2+e}{4e} < &\Rightarrow \sqrt{\frac{2+e}{e}} < x \end{aligned}$$

پس $M \sqrt{\frac{2+e}{e}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2-x} > M &\Rightarrow x^2 > 2M - Mx \\ \Rightarrow x^2 &> Mx + \frac{M^2}{e} > 2M + \frac{M^2}{e} \\ \Rightarrow \left(x + \frac{M}{2} \right)^2 &> 2M + \frac{M^2}{2} \\ \Rightarrow x &> \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2} \end{aligned}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$N < \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2} \quad \text{كافى است}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 3) = +\infty \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x^5 - 3 > M &\Rightarrow x^5 > M + 3 \\ &\Rightarrow x > \sqrt[5]{M + 3} \end{aligned}$$

$$N > \sqrt[5]{M + 3} \quad \text{پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x) = +\infty \quad (14)$$

$$x^5 + x > M \Rightarrow$$

به علت اينکه $x \rightarrow +\infty$ پس x را می‌توان نادیده گرفت.

$$x^5 x > x^5 + 1 > M \Rightarrow x > \sqrt[5]{M - 1} \Rightarrow N \geq \sqrt[5]{M - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{2x-4} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\left| \frac{x+5}{2(x+1)} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2}{x+1} \right| < e$$

$$\Rightarrow \frac{4}{e} - 2 < x \Rightarrow M \geq \frac{4}{e} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \quad (17)$$

$$\sqrt{x^2 + 1} > N \Rightarrow x^2 > N - 1 \Rightarrow x > \sqrt{N - 1} \Rightarrow M \geq \sqrt{N - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 + 1} > N &\Rightarrow (x - 3)^2 - 7 > N^2 \\ &\Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 7} + 3 \quad M \geq \sqrt{N^2 + 7} + 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 4} < -N &\Rightarrow x^2 - 4 > N^2 &\Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 4} \\ &&\Rightarrow M \geq \sqrt{N^2 - 4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} = +\infty \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} < N &\Rightarrow (x-1)^2 - 3 > N^2 &\Rightarrow x-1 > \sqrt{N^2 + 3} \\ &&\Rightarrow x > 1 + \sqrt{N^2 - 3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - x} = -\infty \quad (21)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - x} > -N &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > N^2 \\ &\Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \\ &\Rightarrow M \geq \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \end{aligned}$$

136-2-5-2 تمرین صفحه

حدود زیر را حساب کنید.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = 1$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| - 1}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 1}{0^-} = +\infty$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[2]{\sqrt[3]{x^3+1}} + \sqrt[2]{\sqrt[3]{x^3+1}}} = \mathbf{0}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2| - |x|^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|n^2| - |n|^2}{n^2 - 1} = \mathbf{0}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{3x-x^2}-1} = \mathbf{0}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3+x}{x^2-5x+6} = \frac{6}{1 \times \mathbf{0}^-} = \frac{6}{\mathbf{0}^-} = -\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} = \frac{2}{\mathbf{0}^+} = +\infty$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8) \left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}} + 3 \right)}{(\sqrt[3]{x})(\sqrt{x+1}+3)} = \frac{6}{6} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \\ \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x+6}-3}{(x-27)^3} = \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{(x-27)(x-27)^2 \left(\sqrt[3]{x+6} + 3 \right)} = \\ \lim_{x \rightarrow 27} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}) = \lim \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2[\cos x]}{x} = \frac{2-1}{0^-} = -\infty$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim \frac{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x} - 1} = \lim \frac{\sqrt[12]{x^3}(1 - \sqrt[12]{x})}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= -\lim \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[12]{x^{10}} + \dots + \sqrt[12]{x+1})} = \frac{1-1}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^{2+1}})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^4}{4} - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

163-2 تمرین صفحه

(1) در مورد پیوستگی هر یک از توابع زیر سپس روی بازده داده شده تحقیق کنید.

(الف) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ روی بازه های $(-\infty, 2], [2, +\infty)$ ، $(x), [\mathbf{0}, 3]$

ب) تنها نقطه ناپیوستگی $x = 3$ است، پس تابع فقط روی

$$. (-2, 2) [\mathbf{0}, 2), [\mathbf{0}, 2], (-\infty, 2] [2, +\infty)$$

حل) نقاط $x = \pm 2$ نکات ناپیوستگی تابع است. پس بازه های

$$(-2, 2) [\mathbf{0}, 2), (-\infty, -2)$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{25-x^2}} \quad (ج)$$

$(5, +\infty), [5, \infty), (-2, 5), (-2, 5]$

حل) ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم.

$$D_f = (-\infty, -5) \cup [-2, 5)$$

	-5	-2	5		
$25 - x^2$	-	+	+	-	
$2 + x$	-	-	+	+	

طبق دامنه: تابع روی $[5, +\infty), [5, +\infty), (-2, 5), [-5, -2]$ ناپیوسته است.

تابع روی $(-\infty, -5), [-2, 5), (-\infty, -5)$ پیوسته است.

(2) فواصلی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12} \quad (1)$$

دامنه تابع برابر $D_f = (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$ است. این بازه‌ها فواصل

پیوستگی اند.

$$f(x) = \frac{7}{x^2 - 9} \quad (2)$$

این فواصل $D_f = R - \{\pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ هستند.

فواصل پیوستگی اند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (3)$$

چون فرجه رادیکال فرد و زیر رادیکال همه جا پیوسته است. فاصله

پیوستگی R است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}} \quad (4)$$

$$D_f = [1, 2] \cup (4, +\infty)$$

		1	2	4
x-4	-	-	-	+
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	+

(3) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

$$\text{. حل) } x=2 \text{ نقطه ناپیوستگی است. } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (1)$$

$$\text{. حل) } x=1 \text{ نقطه ناپیوستگی است. } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad (2)$$

$$\text{. حل) } x=1 \text{ نقطه ناپیوستگی است. } f(x) = \frac{x}{x} \quad (3)$$

$$\text{. } f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 2} \quad (4)$$

(حل) نقاط ناپیوستگی اند. $x = 1, 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ 2x+1 & 1 < x \end{cases} \quad (5)$$

(حل) تابع در $x=-1$ و $x=1$ ناپیوستگی دارد. چون تابع در $x=1$ تعریف نشده

و در $x=-1$ حد ندارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$f(x) = \begin{cases} [x] & -2 < x < 0 \\ x - [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (6)$$

تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از دامنه اش ناپیوسته است. (حل)

این تابع در $x=0$ پیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$

(٤) پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = x - [x] \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2 \quad (1)$$

تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است. (حل)

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \quad x_0 = 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2x}{|x|} & x \neq 0 \quad x_0 = 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \quad (3)$$

این تابع در $x_0 = 0$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \neq 2 = f(0)$

$$\cdot f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-x^2}} \quad (4,6) \quad \text{فاصله } (4,6) \text{ و}$$

دامنه تابع برابر $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ است پس تابع f روی (٤,٦) ناپیوسته است.

$$\cdot f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad [1, +\infty) \quad (5) \quad \text{در فاصله } [1, +\infty)$$

دامنه تابع برابر $(-\infty, 0-1] \cup [1, +\infty)$ است پس تابع روی \mathbb{R} پیوسته است.

. $f(x) = \sqrt{2-x}$ ، $(-\infty, 2]$ در فاصله است پس تابع روی $(-\infty, 2]$ پیوسته است.

. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ ، $[-5, 5]$ در فاصله است که تابع روی آن پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{|x|} & x > 1 \\ 2[2x] + 1 & x < 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad (8)$$

تابع در $x_0 = 1$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است.

اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$ پیوسته باشد. $f(2)$ را حساب کنید. (5)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 12 \quad (\text{حل})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}, \quad (\text{تابع } f \text{ با ضابطه } x=0 \text{ در نقطه } x=0 \text{ چه نوع})$$

ناپیوستگی دارد؟

حل) ناپیوستگی اساسی چون حد وجود ندارد زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع } f \text{ با ضابطه (7)} \\ \text{پیوسته است در } x=0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (\text{حل})$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & -p \leq x \leq -\frac{p}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ \cos x & \frac{p}{2} \leq x \leq p \end{cases} \quad (8)$$

مقدار a و b را باید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-p}{2}} f(x) = a + b = f\left(\frac{-p}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}^+} f(x) = -a + b = f\left(\frac{p}{2}\right) = 2 \Rightarrow -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = 1 \quad , \quad a = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & x < -1 \\ \frac{x-1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (99) \quad \text{تابع با ضابطه دارد؟}$$

حل) داریم: $f(1) = 1$ تعریف شده است. ناپیوستگی اساسی

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \text{است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$\text{اگر } x > 2 \quad f(x) = \begin{cases} 2x + ax, \\ ax^2 + 1, \end{cases} \quad \text{کنید.}$$

$$\text{اگر } x \leq 2 \quad (10)$$

حل) چون ضابطه ها روی \mathbb{R} پیوسته اند کافی است پیوستگی در $x=2$ بررسی شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + ax) = 4 + 2a = f(2) = 4a + 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2a = 4a + 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\text{همواره } f(x) = \begin{cases} [\lfloor x \rfloor - x], & x \notin \mathbb{Z} \\ a, & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (11) \text{ به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع } f \text{ با ضابطه}$$

پیوسته است؟

حل) با توجه به خواص جزء صحیح همواره $x - [\lfloor x \rfloor] < 1$ پس $0 \leq x - [\lfloor x \rfloor] < 1$ پس باشد $a = -1$.

$$\text{در } x=1 \quad f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ bx - 1, & x < 1 \end{cases} \quad \text{اگر تابع} \quad (12)$$

پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + a) = 3 \Rightarrow 1 + a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 1) = 3 \Rightarrow b - 1 = 3 \quad (\text{حل})$$

$$\Rightarrow a = 2, \quad b = 4$$

$$\text{پیوسته در نقطه } x=0 \quad f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x}, & x \geq 0 \\ 2a - x, & x < 0 \end{cases} \quad (13) \text{ به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a - x) = 2a = f(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad (\text{حل})$$

(14) و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 4$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x-2] + b & , \quad x < 4 \\ \left[\frac{x}{3} \right] + b & , \quad x = 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & , \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8 = f(4) = 1 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (a[x-2] + b) = 5a + b = f(4) = 1 + b \quad (\text{حل})$$

$$1 + b = 8 \quad \Rightarrow b = 7 \quad 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$(15) \text{ اگر تابع با ضابطه } f(x) = (a^2 - 4a)[x] + 3[x] \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته باشد}$$

مقدارهای a را پیدا کنید.

حل) نقطه $x_0 = 0$ را در نظر بگیرید داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -(a^2 - 4a) - 3 = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad a = 3$$

(16) پیوستگی تابع $f(x) = [x + [x]][1 - x + [x]]$ را در $x=0$ بررسی کنید.

حل) واضح است که $f(0) = 0$ است.

فرض کیم $x=0/1$ از راست نزدیک صفر باشد. و
 $f(0/1) = [0/1 + \mathbf{0}] [1 - 0/1 + \mathbf{0}] = \mathbf{0}$
 بگیریم.

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{0}/1) &= [-\mathbf{0}/1 - 1] [1 + \mathbf{0}/1 + 1] = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) &= f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{بنابراین:} \\ &\qquad x \rightarrow \mathbf{0}^+ \end{aligned}$$

پس تابع در $\mathbf{0}_0$ پیوسته است.

$$(17) \text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 5x + 1 & , \quad x \in z \\ 1 & , \quad x \notin z \end{cases} \text{ مفروض است. این}$$

تابع در چند نقطه صحیح پیوسته است. آیا این تابع در $x_0 = \frac{5}{4}$ و $x_0 = \sqrt{2}$

$$x_0 = \frac{7}{3} \text{ پیوسته است.}$$

(حل) چون برای $x \notin z$ ، $f(x) = 1$ ، اگر x_0 عددی صحیح باشد آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \quad \text{پس باید اعداد صحیحی را بیابیم که } f(x_0) = 1 \text{ باشد.}$$

$$\begin{aligned} 4x^{3x} - 9x^2 + 5x + 1 &= 1 \Rightarrow \quad 4x^3 - 9x^2 + 5x = \mathbf{0} \quad \Rightarrow x(4x^2 - 9x + 5) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow x_0 = \mathbf{0} \quad , \quad x_0 = 1 \quad , \quad x_0 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

این تابع در اعداد صحیح $\mathbf{0}$ و $x_0 = 1$ پیوسته است.

این تابع در نقاط $x_0 = \frac{7}{3}$ ، $x_0 = \sqrt{2}$ ، $x_0 = \frac{5}{4}$ پیوسته است زیرا این اعداد

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

صحيح نیستند و برای همه آنها $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 1$ است.

(18) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x_0 = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} & , \quad x < -2 \\ a & , \quad x = -2 \\ b + [x^2] & , \quad x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = b + 4 = f(-2) = a \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = 4 = a \\ \Rightarrow a &= 4 \quad , \quad b = 0 \end{aligned}$$

(19) a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر همواره پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx - 3 & , \quad x < 1 \\ x^3 - x + 4a & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 5x - 2b & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

(حل) چون ضابطه ها چند جمله ای اند هر کدام همواره پیوسته اند باید پیوستگی در

$x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 + bx + 3) = 2a + b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x + 4a) = 8 - 2 + 4a$$

$$f(1) = 1 - 1 + 4a = 4a, \quad f(2) = 10 - 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 3 = 4a \\ 6 + 4a = 10 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{5}{4}$$

170. صفحه 32-6-2 تمرین

(1) فرض کنید تابع g در نقطه $\mathbf{0}$ پیوسته باشد $f, g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر در نامساوی $|f(x)| \leq g(x)$ صدق کند. ثابت کنید f در نقطه $\mathbf{0}$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq g(x) &\Rightarrow |f(\mathbf{0})| \leq g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} &\Rightarrow |f(\mathbf{0})| = \mathbf{0} \\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |x| &\Rightarrow \mathbf{0} \leq f(\mathbf{0}) \leq \mathbf{0} &\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

حال چون g پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = \mathbf{0}$ از طرفی داریم:

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

چون $\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = \mathbf{0}$ در نتیجه پس f در صفر پیوسته است.

(2) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

الف) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) اگر $f(a) > 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

(حل)

چون $f(a) > 0$ موجود است به اگر $e = \frac{f(a)}{2}$ را در نظر بگیریم :

طوری که

$$\begin{aligned} |x-a| < 4 &\Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2} \\ \Rightarrow -\frac{f(a)}{2} < f(x)-f(a) &< \frac{f(a)}{2} \\ \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) &< \frac{3}{2}f(a) \end{aligned}$$

چون $f(a) > 0$ پس f در همسایگی a از d مثبت است.

ب) اگر $f(a) < 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

(حل)

چون $f(a) < 0$ پس $-f(a) > 0$ اگر قرار دهیم $e = -\frac{f(a)}{2}$ چون f در a پیوسته

است. $4 > 0$ موجود است به طوری که

$$\begin{aligned} |x-a| < 4 &\Rightarrow |f(x)-f(a)| < -\frac{f(a)}{2} \\ \Rightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) &< f(a) - \frac{f(a)}{2} \\ \Rightarrow \frac{3}{2}f(a) < f(x) &< \frac{f(a)}{2} \end{aligned}$$

پس $\frac{3}{2}f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2}$

حال چون $f(a) < \mathbf{0}$ پس در همسایگی d از a ، f منفی است.

(3) فرض کنید تابع f در x_0 پیوسته باشد و در هر همسایگی x نقاطی مانند x_1 ، x_2 ، $f(x_0) = \mathbf{0}$. ثابت کنید $f(x_1) < \mathbf{0}$ ، $f(x_2) > \mathbf{0}$ وجود داشته باشد که

حل) اگر $f(x_0) \neq \mathbf{0}$ طبق مسئله (2) همسایگی هایی حول x_0 وجود دارد که روی آنها $\mathbf{0} < f(x) < \mathbf{0}$ یا $f(x) > \mathbf{0}$ با شرایط فوق وجود ندارد پس $f(x_0) = \mathbf{0}$ است.

(4) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = \mathbf{0}$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & , \quad x \neq \mathbf{0} \\ a & , \quad x = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1 + \frac{x}{2} - 1}{1 + \frac{x}{3} - 1} = \frac{3}{2} \quad (\text{حل})$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

بر خواهد داشت اگر f در نقطه $x = \mathbf{0}$ پیوستگی داشته باشد

$$f(x) = \begin{cases} [x+1] \sin \frac{1}{x} & , \quad x \in (-1, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, 1) \\ \mathbf{0} & , \quad x = \mathbf{0} \end{cases}$$

پیوستگی f در نقطه های $\mathbf{0}$ و 1 بررسی کنید.

$$x_0 = \mathbf{0} \quad , \quad \lim_{\mathbf{0} \rightarrow -} [x+1] \sin \frac{1}{x} = \mathbf{0} \times k = \mathbf{0} \quad (\text{حل})$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

حد راست این تابع وجود ندارد پس تابع در صفر پیوسته نیست.

برای $x_0 = 1$ حد راست برابر ۰ است زیرا:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1^+ &\Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \mathbf{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \times \sin 1 = \sin 1 \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

پس تابع در نقطه ۱ پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , x = \mathbf{0} \\ -1 & , x < \mathbf{0} \end{cases} \quad (6)$$

نایپوستگی تابع های fog و fog را تعیین کنید.

حل: چون همواره $x - [x] \leq \mathbf{0}$ پس $g(x) > \mathbf{0}$ است لذا

این تابع همواره پیوسته است. $fog(x) = f(g(x)) = 1$

برای fog داریم:

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & , x > \mathbf{0} \\ 1 & , x = \mathbf{0} \\ 1 & , x < \mathbf{0} \end{cases}$$

پس $gof(x) = 1$ همواره پیوسته است.

توجه: این مثال نشان می دهد ممکن است دو تابع نایپوسته باشند ولی ترکیب آنها پیوسته باشد.

(7) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x + a) = f(a)$$

حل) اگر f در a پیوسته باشد. به ازای $\epsilon > 0$ داده شده $d > 0$ موجود

است که

$$|x - a| < d \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

اگر به جای x ، $x + a$ قرار دهیم داریم:

$$|x - 0| = (x + a) - a < d \Rightarrow |f(x + a) - f(a)| < \epsilon$$

و این یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$

حال فرض کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$

اگر به جای x قرار دهیم $t - a$ هرگاه $x \rightarrow 0$ آن گاه $t \rightarrow a$

$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

(8) نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

تابع در 1 پیوسته است. (حل)

تابع در -1 ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \Rightarrow$$

تابع در $x = -1$ ناپیوسته است.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{p}{2} x & , |x| \leq 1 \\ |x - 1| & , |x| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

حل) داریم $f(-1) = f(1) = \mathbf{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{p}{2} x = \mathbf{0}$$

تابع در -1 - ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x - 1| = 2$$

$$f(x) = x[x] \quad (3)$$

تابع در اعداد صحیح به غیر از صفر ناپیوسته است. در صفر:

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} x[x] = \mathbf{0} \times Q = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

$$f(x) = x - [x] \quad (4)$$

حل) تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

$$x \in R - \{\mathbf{0}\} \quad , \quad f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \quad (5)$$

این تابع در نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ که $n \in Z$ است ناپیوسته است.

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \quad (6)$$

صفر است ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in Q \\ -x^2 & , \quad x \notin Q \end{cases} \quad (7)$$

حل) این تابع فقط در صفر پیوسته است چون هر دنباله $\{a_n\}$ گویا یا اسم که به صفر میل کند $a_n^2 - a_0^2$ نیز به صفر میل می کند.

برای سایر نقاط: اگر $a_n = x_0 + \frac{1}{n}$ باشد در Q قرار دارد و

$$f(a_n) = (x_0 + \frac{1}{n})^2 \rightarrow x_0^2 = f(x_0)$$

$$\text{و } b_n = x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$f(b_n) = -(x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2 \rightarrow -x_0 \neq f(x_0)$$

مشابه این تابع در اعداد اصم نیز ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in [0, 1] \\ x+1 & x \in (1, 3) \end{cases} \quad (8)$$

حل) این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \Rightarrow \text{تابع پیوسته نیست}$$

$$f(1) = 1$$

توجه کنید دامنه تابع برابر $[0, 3]$ است که در $x_0 = 1$ پیوسته نیست.

$$x \in [0, 1], \quad f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2}[1-2x] \quad (9)$$

حل) داریم

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1, \quad f(\mathbf{0})$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2}[-2x] \\ &= -x + \frac{1}{2}([2x] - [-2x]) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}^+} f(x) = \mathbf{0} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

تابع در صفر ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{1}^+} f(x) = -1 + \frac{1}{2}(2 - (-3)) = -1 + \frac{5}{2}$$

تابع در ١ پیوسته نیست

\Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (-2)) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست \Rightarrow

(٩) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4, 10]$ پیوسته است.

حل) چون برای هر $x - 4 \geq 0$ است و تابع $x - 4$ پیوسته است پس f روی بازه $[4, 10]$ پیوسته است.

فرض کنید R : f تابعی دلخواه باشد و $g(x) = f(|x|)$, ثابت

کنید f در نقطه $\mathbf{0}$ از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه $\mathbf{0}$ پیوسته باشد.

است پس $\mathbf{0} \geq |x|$ از راست پیوسته باشد. چون $\mathbf{0}$ در f فرض کنید حل)

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(|x|) = f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$$

پس g در صفر پیوسته است.

اگر g در صفر پیوسته باشد. آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} g(x) = g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0})$$

پس f از راست در $\mathbf{0}$ پیوسته است.

$$آیا معادله \mathbf{0} = x^5 - 18x + 2 \text{ در بازه } [-1, 1] \text{ دارد؟} \quad (11)$$

حل) بله اگر $f(x) = x^5 - 18x + 2$ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= 2 & \Rightarrow & f(\mathbf{0})f(1) < \mathbf{0} & \Rightarrow & \text{تابع دارای ریشه است} \\ f(1) &= -15 \end{aligned}$$

$$\text{ثابت کنید معادله } \mathbf{0} = x^5 - 3x^2 - x + 1 \text{ حداقل یک ریشه در بازه } (0, 2) \text{ دارد.} \quad (12)$$

حل) $f(x) = x^5 - 3x^2 - x + 1$ را در نظر بگیرید.

ح _____ داقل ی _____ ک ریش _____ دارد.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= 1 \\ f(1) &= 1 - 3 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{0})f(1) < \mathbf{0} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{فرض کنید تابع } f : [1, 2] \rightarrow [\mathbf{0}, 3] \text{ پیوسته باشد و } f(1) = \mathbf{0} \text{ و } f(2) = 3 \quad (13)$$

ثابت کنید عددی مانند x_0 در بازه $(1, 2)$ موجود است که $f(x_0) = x_0$.

حل) اگر تابع $h(x) = f(x) - x$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$h(1) = f(1) - 1 = \mathbf{0} - 1 = -1$$

$$h(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$$

چون $h(1)h(2) < 0$ است. پس x در $(1, 2)$ موجود است که $h(x_0) = \mathbf{0}$ پس

$$f(x_0) = x_0$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\text{فرض کنید } f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(px) + 3 \text{ آیا عددی مانند } x_0 \text{ در بازه } (-2, 2) \text{ وجود دارد که } f(x_0) = \frac{7}{3} \quad (14)$$

پیوسته است و x_0 وجود دارد.

$$\text{حل) چون } f(-2) = -2 + 3 = 1, f(2) = 2 + 3 = 5 \quad (2 \text{ و } -2 \text{ روی } f \text{ تابع})$$

$\frac{7}{3}$ پیوسته است و x_0 وجود دارد.

$$\text{فرض کنید تابع } f : [-1, 1] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد،} \quad (15)$$

$$f(x) \neq 2, x \in [-1, 1], f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

حل) اگر به ازای x_0 $f(x_0) > 2$ ، x_0 طبق قضیه مقدار میانی تابع هر مقدار

بین $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ را خصوصاً مقدار ۲ را می‌گیرد یعنی x_0 وجود دارد

که $f(x) = 2$ و این تناقض است. پس همواره $f(x) < 2$ است.

$$\text{فرض کنید تابع } f : [3, 5] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد،} \quad (16)$$

$$f(x) \neq 4, x \in [3, 5], f(3) = 30$$

حل) اگر $f(5) > 4$ باشد، چون تابع پیوسته است مقادیر بین $f(3) = 3$ و $f(5)$ را

خصوصاً مقدار ۴ را می‌گیرد، یعنی x_0 وجود دارد که $f(x_0) = 4$ که تناقض با

فرض است. پس $f(5) < 4$ است.

$$\text{فرض کنید تابع } f : [\mathbf{0}, 3] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد، } f(\mathbf{0}) = 1 \text{ و معادله } f(x) = \mathbf{0} \quad (17)$$

هیچ ریشه‌ای در بازه $[0, 3]$ نداشته باشد ثابت کنید برای هر $x \in [0, 3]$ ، داریم

$$f(x) > \mathbf{0}$$

حل) برای $x \in [0, 3]$ را در نظر بگیرید، f روی این بازه پیوسته است. چون

$f(0) = 1$ ، اگر $f(x) < \mathbf{0}$ باشد، حتماً f روی این بازه ریشه دارد که تناقض است،

پس همواره $f(x) > 0$

$$f(0) = 0, \quad f : R \rightarrow R \quad \text{فرض کنید} \quad (18)$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in R$$

ثابت کنید اگر f در نقطه 0 پیوسته باشد در هر نقطه دیگر هم پیوسته است

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$$

حل) نقطه دلخواه a را در نظر بگیرید نشان می دهیم

برای $d > 0$ وجود دارد که

$$|x| < d \Rightarrow |f(x)| < e$$

$$f(x+a) \leq f(x) + f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+a) - f(a) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow |x| < d \Rightarrow |f(x+a) - f(a)| \leq |f(a)| < e$$

و این یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

$$x \rightarrow 0$$

فرض کنید I بازه ای باز باشد، تابع های $f, g : I \rightarrow R$ پیوسته باشد. و:

$$s(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

$$t(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

ثابت کنید s و t پیوسته اند:

حل) توابع s و t را می توان به صورت زیر نوشت:

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$s(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

$$t(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

با توجه به فرض پیوستگی f و g همه توابع سمت راست پیوسته اند.

(20) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؟

الف) f در نقطه a پیوسته باشد و g در نقطه a پیوسته نباشد اما fog در نقطه a

پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = x^2 \quad \text{تابع} \quad \text{حل)$$

در $a = 0$ پیوسته است ولی g در $a = 0$ پیوسته نیست اما:

$$fog(x) = 1$$

همه جا پیوسته است.

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما fog در a پیوسته باشد.

حل) مثال قسمت الف را در نظر بگیرید اینبار $gof(x) = 1$.

ج) نه f در a پیوسته باشد و نه g اما fog در a پیوسته باشد.

حل) تمرين (6) مثال مورد نظر است

(الف) ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه فرد حد اقل یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر $f(x)$ چند جمله ای درجه فرد باشد آنگاه

حداقل یک ریشه دارد.

ب) فرض کنید $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ثابت کنید معادله $p(x) = 0$ حد اقل دو ریشه متمایز دارد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty > 0$$

و

پس حد اقل ریشه در بازه $(-\infty, 0)$ و یک ریشه در بازه $(0, +\infty)$ دارد.

فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ددی زوج باشد (22)

$a_n a_0 \neq 0$ و ثابت کنید معادله $f(x) = 0$ حداقل دو ریشع حقیقی دارد.

حل) چون $a_n a_0 < 0$ فرض کنید $a_n > 0$ و $a_0 < 0$. چون n زوج است و

پس $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

از طرفی $f(0) = a_0 < 0$. پس حد اقل یک ریشه حقیقی در $(-\infty, 0)$ و یک ریشه حقیقی در $(0, +\infty)$ وجود دارد.

فصل سوم

مشتق

١٧-١-٣ تمرین صفحه ١٩٢

(١) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

$$f(x) = 3x + 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+1-3x-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f(x) = \sqrt{3x+4} \quad (2)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+4} - \sqrt{3x+4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+4-(3x+4)}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = 3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x_0}{x_0^2 + 1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x - x_0)(x^2 + 1)(x_0^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x - x_0)(x^2 + 1)(x_0^2 + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - x_0^2)}{(x_0^2 + 1)^2} = f'(x_0)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (4)$$

$$\lim \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0+1}}}{x - x_0} = \frac{x\sqrt{x_0+1} - x_0\sqrt{x+1}}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}}$$

$$= \lim \frac{x - x_0}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}(x\sqrt{x_0+1} + x_0\sqrt{x+1})} = \frac{1}{2(x_0+1)\sqrt{x_0+1}}$$

(2) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

$$f(x) = 5x^2 + x \quad (1)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+6)(x-1)}{x-1} = 11$$

$$x = 1 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \quad (2)$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x = 1 \quad , \quad f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \quad (3)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+2}{2x+1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(x-1)(2x+1)} = -\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \quad , \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (4)$$

حل المسائل رياضى عمومى (١)

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(2x+1)} = \mathbf{0}$$

(3) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید ($x = a$) ثانیاً $f^{-'}(a)$ و $f^{+'}(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\begin{aligned} & , x = a = 4 \\ f(x) &= \begin{cases} x+2 & , x \leq -4 \\ -x-6 & , x > -4 \end{cases} \\ & x = a = 4 \end{aligned} \quad (1)$$

حل) اولاً تابع در $a = -4$ پیوسته است. ثانیاً $f^{-'}(-4) = 1$ و $f^{+'}(-4) = -1$

$$a = 2 , \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x < 2 \\ \sqrt{x-2} & , x \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

حل) اولاً تابع در $a = 2$ پیوسته است. ثانیاً $f^{-'}(2) = 4$ و $f^{+'}(2) = +\infty$

$$f^{-'}(1) = 6 \quad \text{و} \quad f^{+'}(1) = 1 \quad \text{و} \quad a = 2 , \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & , x < 1 \\ x-2 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

اولاً ثابت کنید $f(x) = |x|$ در $x = \mathbf{0}$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

حل) $f(\mathbf{0}) = \lim f(x) = \lim |x| = \mathbf{0}$ پس $f(\mathbf{0})$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - |\mathbf{0}|}{x - \mathbf{0}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|}{x}$$

فصل دوم : حد و پیوستگی

پس $f'(0) = 1$ و $f'(-1) = -1$ است. لذا تابع صفر مشتق ندارد

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{ثانیاً همچنین برای هر } x \neq 0 \text{ داریم:}$$

(5) a و b را طوری تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

$$x=1 \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ ax - b & x \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

حل) باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \quad a + b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ a & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{از طرفی داریم:}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 2 \quad = f'(1) = a \quad \Rightarrow \quad a = 2 \\ b = -1$$

$$x=3 \quad \text{در} \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & x < 3 \\ bx - 6 & x \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

حل) شرط پیوستگی را نداریم:

$$\Rightarrow 9a + 3 = 3b + 6$$

٦

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

از طرفی داریم: $f(x) = \begin{cases} 2ax & x < 3 \\ b & x \leq 3 \end{cases}$ پس داریم

$$\begin{aligned} f'(3) &= 6a \\ f'(3) &= b \Rightarrow b = 6a \Rightarrow 9a = 18a + 3 \\ &\Rightarrow -9a = 3 \\ &\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ b &= -2 \end{aligned}$$

(6) پیوستگی و مشتق پذیری تابع f را در $x = 2$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & x \leq 2 \\ 8x - 11 & x > 2 \end{cases}$$

(حل)

تابع پیوسته است $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (8x - 11) = 5 \Rightarrow f(2) = 8 - 3 = 5$

از طرفی داریم $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \leq 2 \\ 8 & x > 2 \end{cases}$ پس $f'(2) = 8$

پس تابع در $x = 2$ مشتق پذیر است.

(7) در چه نقطه‌ای از مخفی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 = -2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

فصل دوم : حد و پیوستگی

(8) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 + 9 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(9) معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $A(2, 0)$ بیابید.

$$m = y'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}(2) = +\infty \quad \text{حل}$$

پس $x=2$ معادله خط مماس است.

18-1-3 تمرین صفحه 193

(۱) مشتق پذیری هر یک از توابع داده شده را بررسی کنید.

$$f(x) = |x^2 - 1| \quad , \quad x_0 = 1 \quad (1)$$

در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x < 1 \\ x^2-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{حل})$$

$$f+'(1) = 2$$

و $f-'(1) = -2$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

$$x_0 = 2 \quad , \quad f(x_0) = 4x + 1 + |x - 2| \quad (2)$$

مشق پذیر نیست چون (حل)

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3 & x < 2 \\ 5x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f+'(2) = 5 \\ f-'(2) = 3 \end{array}$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \quad (3)$$

(حل)

$$f(x) = |x| \sqrt{x+1} = \begin{cases} x\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ x\sqrt{x+1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f+'(0) = 1 \\ f-'(0) = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{تابع مشتق پذیر نیست} \\ f-'(0) = -1 \end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} \quad x_0 = 1 \quad (4)$$

(حل)

$$f(x) = |x-1| \sqrt{x+2} = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} & x \geq 1 \\ (1-x)\sqrt{x+2} & x < 1 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست.

$$\Rightarrow f_+'(1) = 1, f'_-(1) = -1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 4x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad (5)$$

(حل)

تابع مشتق پذیر نیست چون $f'_-(1) = 2, f'_+(1) = 4$ است.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad x=1 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f'(1) = +\infty \Rightarrow$$

تابع مشتق پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x > 0 \\ \frac{1}{1-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

فرض کنید (2)

پذیر نیست.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$x > \mathbf{0} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_+(\mathbf{0}) = -1$$

تابع مشتق پذیر نیست. \Rightarrow

$$x < \mathbf{0} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} \Rightarrow f'_-(\mathbf{0}) = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases} \quad \text{فرض کنید (3)}$$

$x = 1$ مشتق پذیر است و $f'(1)$ را حساب کنید.

$$x > \mathbf{0} \Rightarrow f'(x) = 2 \quad f'_+(1) = 2 \quad \text{حل}$$

پس تابع مشتق پذیر است و $f'(1) = 2$ است.

$$x < \mathbf{0} \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f'_-(1) = 2$$

$$\text{فرض کنید } x = \mathbf{0}, \quad f(x) = (-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}. \quad \text{آیا در نقطه } x = \mathbf{0} \text{ مشتق}$$

پذیر است؟

حل) زیرا این نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. تابع پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست.

$$f(x) = x[x] \quad x \in R \quad \text{درباره مشتق پذیری تابع (5)} \quad \text{بحث کنید.}$$

حل) این تابع در اعداد صحیح مشتق پذیر نیست، چون در این نقاط پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{x[x] - \mathbf{0}}{x - \mathbf{0}} = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} [x] \quad \text{در نقطه } x = \mathbf{0} \text{ صفر پیوسته است ولی داریم:}$$

که حد اخیر وجود ندارد.

در سایر نقاط اگر $0 < a < 1$ باشد که $x_0 = n + a$ است.

در همسایگی x_0 داریم $f'(x) = n$ پس $f(x) = nx$ که مشتق پذیر است.

(6) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد و $f(a) \neq 0$. ثابت کنید.

$$g(x) = [x-1]f(n)$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

بنابراین $f'(a) = -f(a)$ و $f'(a) = f(a)$

(7) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $\begin{cases} \frac{1}{x-a} & x \neq a \\ f(x) & x = a \end{cases}$ پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & |x| < 1 \end{cases}$$

(حل) ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b = f(1) = 1$$

$$f'(1) = -1 = f'(1^-) = 2a$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} & x \leq -1 \\ ax^2 + b & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

(8) فرض کنید $f'(1) = 0$ را حساب کنید.

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) = 1 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{p}{4} \end{aligned}$$

(٩) فرض کنید $f'(0)$ ، $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-100)$ احساب کنید.

حل) چون $f(0) = 0$ داریم.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)\dots(x-100)}{x} = (-1)(-2)\dots(-100) \\ &= 100! \end{aligned}$$

$f'\left(\frac{p}{2}\right)$ را حساب کنید. ، مقدار $f(x) = [x]\sin x$ (١٠)

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{p}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{p}{2}+h\right) - f\left(\frac{p}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{p}{2}+h\right] \sin\left(\frac{p}{2}+h\right) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{p}{2}+h\right) - 1}{h} = (\sin x)' \left(\frac{p}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

حل) داریم

(١١) اگر برای $f'(0)$ ، مقدار $x \leq f(x) \leq x = x^2$ ، $|x| < 1$ ایجاد کنید.

حل) واضح است که $0 \leq f(0) \leq 0$ پس $f(0) = 0$ است.

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+x$$

$$x > 0 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

$$x < 0 \Rightarrow 1+x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = 1$$

پس $f'(0) = 1$ است.

(12) مقدار مشتق تابع $f(x) = x|x|$ را در صفر بدست آورید.

حل) داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

247 ۱۱-۴-۳ تمرین صفحه ی

(1) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$1) y = \sin^5 x \rightarrow y' = 5 \cos x \sin^4 x$$

$$2) y = (\tan x + \cos x)^3 \rightarrow y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(\tan x + \cos x)$$

$$3) y = \tan(\sin x) \rightarrow y' = \cos x \cdot \sec^2(\sin x)$$

$$4) y = \sin(\sin x) \rightarrow y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$5) y = \cos^2(\sin 3x) \rightarrow y' = -6 \sin 3x \cdot \sin(\sin 2x) \cos(\sin 3x)$$

$$6) y = 5 \sin(\cos 4x) \rightarrow y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$7) \quad y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x + 3} \quad \rightarrow y' = \frac{-2\sin x(\cos x + 3) + \sin x(2\cos x - 1)}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \frac{-7\sin x}{(\cos x + 3)^2}$$

$$8) \quad y = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$9) \quad y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$10) \quad y = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \quad \rightarrow y' = \frac{\sec^2 x(\tan x + 1) - \sec^2 x(\tan x - 1)}{(\tan x + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

در هر مورد $y' = \frac{dy}{dx}$ را بیابید. (2)

$$1) \quad x\sin y + y\sin x = xy \quad y' = -\frac{\sin y + y\cos x - y}{x\cos y + \sin x - x}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16} \quad y' = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{y}}$$

$$3) \quad y\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 5 \quad y' = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{y - 3x}{4x}$$

$$4) \quad x^2 y + \sin^2 y = y \quad y = \frac{2xy}{x^2 + \sin 2y - 1}$$

(3) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) \quad y = \cos^{-1}(7x^2) \quad y' = -\frac{14x}{\sqrt{1-49x^4}}$$

$$2) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = -\frac{3x^2 + 2}{\sqrt{1-(x^2 + 2x)^2}}$$

$$3) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = \frac{-2\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^2 2x}} = -2$$

$$4) \quad y = \tan^{-1}(x^5) \quad y' = \frac{5x^4}{1+x^{10}}$$

$$5) \quad y = \tan^{-1}(\cos x) \quad y' = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$6) \quad y = \cos\left(5\cos^{-1}x\right) \quad y' = -\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-25(\cos^{-1}x)^2}}$$

$$7) \quad y = \tan^{-1}\left(\sqrt{x+1}\right) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}$$

$$8) \quad y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x \quad y = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow y' = 0$$

$$9) \quad y = \cos^{-1}(\sin x) \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1$$

$$10) \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$11) \quad x \sin y + x^2 = \tan^{-1} y \quad y' = -\frac{\sin y + 2x}{x \cos y + \frac{1}{1+y^2}}$$

$$12) \quad y \sin^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x+y)$$

$$y' = -\frac{\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}{\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \sin^{-1}(xy) + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}$$

. $(f^{-1})'(2)$ ، مطلوب است محاسبه (4) هرگاه $f(x) = x^3 + x$

(حل)

$$\begin{aligned}
 y = 2 &\Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \\
 &\Rightarrow x = 1 \\
 f'(x) = 3x^2 + 1 &\Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

اگر f مسافتی باشد که متحرک در زمان t طی می کند، مطلوب است محاسبه (5)

$$s = 50 + 80t + 16t^2, \text{ اگر } a = \frac{d^2 s}{dt^2} \text{ شتاب باشد.}$$

(حل)

$$b = 1 \text{ را در } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ و } \frac{dy}{dx} \text{ مقدار } y = t + t^3 \text{ و } x = t + t^2 \text{ اگر (6)}$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 x = t + t^2 &= f(t) & f'(t) &= 1 + 2t & , & f''(t) &= 2 \\
 &\Rightarrow \\
 y = t + t^3 &= g(t) & g'(t) &= 1 + 3t^2 & , & g''(t) &= 6t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1) &= \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{3}{4} \\
 \frac{d^2 y}{dx^2}(1) &= \frac{g''(1)f'(1) - f''(1)g'(1)}{(f'(1))^3} = \frac{18 - 8}{9} = \frac{10}{9}
 \end{aligned}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$\Delta x = 0/1$ آنگاه Δy و dy را به ازای $x = 3$ و $y = 3x^2 + 4x + 1$ اگر (۷) محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3 + 0/1) - f(3)$$

(حل)

$$\begin{aligned} &= 3(3/1)^2 + 4(3/1) + 1 - 27 - 12 - 1 \\ &= 3(9/61) + 12/4 - 39 \\ &= 28/83 + 12/4 - 39 = 2/23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy = f'(x)\Delta x &\Rightarrow dy = 22 \times 0/1 = 2/2 \\ f'(x) = 6x + 4 &\Rightarrow f'(3) = 22 \end{aligned}$$

اگر معادله‌ی حرکت یک ذره $s = 20 + 30t + 3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t = 2$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = 30 + 6t \Rightarrow v(2) = 42 \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = 6 \Rightarrow a = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ ، آنگاه } f(x) = \sqrt{x^2 + x} \text{ اگر (9)}$$

$$1) \quad y = f(x + \sqrt{x}) \quad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \frac{2(x + \sqrt{x}) + 1}{2\sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + (x + \sqrt{x})}}$$

$$2) \quad y = f(\cos x + \cot x)$$

$$y' = (-\sin x - (\cot^2 x)) \frac{2(\cos x + \cot x) + 1}{2\sqrt{(\cos x + \cot x)^2 + (\cos x + \cot x)}}$$

$$3) \quad y = f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \Rightarrow y = f\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)$$

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \frac{2\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}}$$

$$4) \quad y = f(f(x^2)) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2)f'(f(x^2))$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+x^2}} \cdot \frac{2\sqrt{x^4+x^2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2 + \sqrt{x^4+x^2}}}$$

(10) معادله های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع های به معادله y

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

زیر در نقطه ای به طول یک واقع بر منحنی را بنویسید.

$$\begin{aligned}
 1) \quad f(x) &= (x^2 - 4x)^3 \\
 y &= (1-4)^3 = 9 \\
 y' &= 3(2x-4)(x^2 - 4x) \Rightarrow y'(1) = 3(-2)(-3) = 18 \\
 y - 9 &= 18(x-1) \Rightarrow y = 18x - 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(x) &= \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} \\
 y &= \frac{1+1}{2-1} = 2 \\
 y' &= 2 \frac{x(2x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \\
 y - 2 &= -\frac{3}{2(x-1)} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad f(x) &= \sqrt[3]{(x^2 - 2)^2} \\
 y &= \sqrt[3]{(1-2)^2} = 1 \\
 y &= (x^2 - 2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times 2x(x^2 - 2)^{-\frac{1}{3}} \\
 &\Rightarrow y'(1) = -\frac{4}{3} \\
 y - 1 &= -\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow y = 2$$

(11) در تابع به معادله $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ اگر y' و y'' مشقات مرتبه اول و دوم لا باشند،

ثابت کنید رابطه $2y''^2 - yy''' = y^4$ برقرار است.

(حل)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow 2yy' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &\Rightarrow yy' = -xy^4 \quad \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{y^3 - 3(y')^2 y^2}{y^6} = -1 \quad \Rightarrow y''y - 3(y')^2 = -y^4$$

$$\Rightarrow 3(y')^2 - yy'' = y^4$$

$$(12) \text{ در تابع به معادله } y = \frac{x^2 + 1}{x} \text{ ثابت کنید } xy'' + 2y' = 2$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \\
 y' &= 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y' \\
 y'' &= \frac{2}{x^3} \Rightarrow xy'' = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2(1 - y') \Rightarrow xy'' + 2y' = 2
 \end{aligned}$$

(13) فرض کنید $f, g : R \rightarrow R$ تابع های مشتق پذیر باشند و $\mathbf{0} \neq \mathbf{0}'$ و $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\mathbf{0})}{g'(\mathbf{0})}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\frac{f(x) - \mathbf{0}}{x - \mathbf{0}}}{\frac{g(x) - \mathbf{0}}{x - \mathbf{0}}} = \frac{f'(\mathbf{0})}{g'(\mathbf{0})}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \leq \mathbf{0} \\ \frac{5}{2}x^2 - 4x & x > \mathbf{0} \end{cases} \quad (14) \quad \text{فرض کنید تابع مشتق تابع را پیدا کنید.}$$

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq \mathbf{0} \\ 5x - 4 & x > \mathbf{0} \end{cases}$$

تابع مشتق تابع را

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

باید.

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2-x-(1-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ +1 & x > 2 \end{cases}$$

(16) مشتق هر یک را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= \frac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}} & \Rightarrow y &= \tan x \cdot x^{-\frac{2}{3}} \\ & & \Rightarrow y' &= \sec^2 x \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \cdot \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &= \frac{\cos x}{1+\sin x} & \Rightarrow y' &= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} \\ & & &= \frac{-1}{1+\sin x} \end{aligned}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$3) \quad y = \sqrt{\operatorname{Arc cot} \frac{x}{2}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[2]{\operatorname{Arc cot} \frac{x}{2}}} \\ \Rightarrow y' = \frac{-1}{(4+x^2)\sqrt{\operatorname{Arc cot} \frac{x}{2}}}$$

$$4) \quad y = \operatorname{Arc tan} \left(x - \sqrt{1+x^2} \right) \\ y' = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(x - \sqrt{1+x^2} \right)^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x \right)}{\sqrt{1+x^2} \left(1 + \left(x - \sqrt{1+x^2} \right)^2 \right)}$$

$$5) \quad y = \operatorname{Arc sin} \frac{1}{|x|} \Rightarrow y' = \begin{cases} \operatorname{Arc sin} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\operatorname{Arc sin} \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 0 \\ \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < 0 \end{cases}$$

$$6) \quad \sin xy + \cos xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y \cos xy - y \sin xy}{x \cos xy - x \sin xy} = -\frac{y}{x}$$

$$7) \quad x y = \operatorname{Arctg} \frac{x}{y} \Rightarrow y \tan(xy) - x = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^2 \sec^2(xy) - 1}{\tan(xy) + xy \sec^2(xy)}$$

$$8) \quad x - y = \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcos} y$$

$$\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcos} y - x + y = 0$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 1}$$

فرض کنید $f(x) = \sin(n \operatorname{Arcsin} x)$. ثابت کنید.

$$(1-x^2)f''(x) - x f'(x) + n^2 f(x) = 0$$

حل $\operatorname{Arcsin}(x)$ را دو طرف اثر می دهیم:

$$\operatorname{Arcsin} f(x) = n \operatorname{Arcsin} x \quad \text{مشتق} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(x))^2}{1-(f(x))^2} = \frac{n^2}{1-x^2} \quad \Rightarrow (1-x^2)(f'(x))^2 = n^2(1-f^2(x))$$

$$\text{مشتق} \Rightarrow 2(1-x^2)f''(x) - 2x(f'(x))^2 = -2n^2 f'(x) f(x)$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\Rightarrow (1-x^2)f''(x) - x(f'(x)) + n^2 f(x) = \mathbf{0}$$

تابع مشتق $f(x) = [x]\sin^2 px$ برای هر $x \in R$ را باید فرض کنید.

حل) چون $\lim_{x \rightarrow n} \sin^2 px = \mathbf{0}$ برای هر n صحیح در تمام نقاط پیوسته است.

$$f(x) = \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^3 \right| \quad \text{تابع مشتق } f \text{ را باید فرض کنید.}$$

(حل)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right| \\ &= \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right|^2 |x+1| \\ \Rightarrow f'(x) &= 2(2x(x+1) + (x^2 - 1))(x^2 - 1)(x+1)|x+1| \\ &\quad + ((x^2 - 1)(x+1)) \frac{|x+1|}{x+1} \end{aligned}$$

فرض کنید $f : R \rightarrow R$ ، f مرتبه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید.

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

حل) با استقرار روی n این مطلب را نشان می دهیم:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow (f(ax+b))' = af'(ax+b) \\ k = n &\Rightarrow (f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \end{aligned}$$

با مشتق گیری از دو طرف فرض داریم:

$$[f(ax+b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)$$

پس حکم برقرار است.

(20) در هر مورد مشتق مرتبه n ام تابع داده شده را به دست آورید.

$$1) \quad y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$2) \quad y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$3) \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y^{(n)} = \sin 2x \left(x + n\frac{p}{2}\right) \Rightarrow y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad y &= \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 2^n \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right) \\ &= 2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad y &= \frac{1+x}{1-x} \quad y' = \frac{-2}{(1-x)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(1-x)^3} \\ &\quad y''' = \frac{-12}{(1-x)^4}, \quad y^{(4)} = \frac{48}{(1-x)^5} \\ &\dots\dots y^{(n)} = (-1)^n \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

(22) مقادیر c, b را طوری تعیین کنید که نمودار $y = x^2 + bx + c$ در نقطه $A(1,1)$ بر

خط $y = x$ مماس باشد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

(حل) (۱، ۱) روی نمودار قرار دارد پس

از طرفی شیب برابر ۱ است پس داریم $b = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow c = 1$$

(23) در چه نقاطی از منحنی $y = x^3 + x - 2$ خط مماس بر منحنی موازی خطاست؟ $y = 4x - 1$ (حل) باید $y'(x) = 4$ باشد پس

$$3x^2 + 1 = 4 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(24) معادله‌ی مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 - 5$ را بنویسید که بر خطعمود باشد. $2x - 6y + 1 = 0$

$$6y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad (\text{حل})$$

پس شیب خط داده شد برابر $\frac{1}{3}$ است لذا شیب خط مماس برابر -3 است پس

$$3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$y'(-1) = 3 - 6 = -3 \Rightarrow y + 3 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 6$$

(25) در مورد تابع $f : R \rightarrow R$ میدانیم $|f(x)| \leq x^2$, $x \in R$ ثابت کنید $f'(0)$ را باید.

مشتق پذیر است.

(حل)

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq x^2 \Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2 \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq |x| \\ \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{|x|} \right| \leq |x| \end{aligned}$$

از طرفی داریم: $\lim(-1|x|) = \lim 1|x| = 0$ پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0) = 0$$

ایا $\left| \frac{f(x)}{|x|} \right| \leq |x| \Rightarrow -1|x| \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq |x|$ می دانیم $f : R \rightarrow R$ در مورد تابع (26)

می توانیم نتیجه بگیریم که f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است؟حل) خیر؛ مثلاً $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید این تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

$f\left(\frac{p}{4}\right)$ را حساب کنید.

حل) چون $0 < \frac{p}{4} < 1$ است پس

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{4}\right)}{x - \frac{p}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{[x]\sin x}{x - \frac{p}{4}} = 0$$

$f'(a)$ یک تابع و $f : R \rightarrow R$ گردد باشد، حاصل

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h}$$

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a) \end{aligned}$$

اگر به ازای $|x| < 1$ اگر $f'(0)$ را مقدار $x \leq f(x) \leq x + x^2$ حساب کنید. (29)

. $f(0) = 0$ نا مساوی داریم: $0 < f(0) \leq 0$ پس

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+x$$

$$\text{درا } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h}, \quad f'(a) = 4, \quad f(a) = 0 \text{ اگر (30)}$$

حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} &= \frac{2}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} \\ &= \frac{2}{5} f'(a) = 4 \Rightarrow f'(a) = 10 \end{aligned}$$

اگر f بر R دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $g''(0) = f(xf(x))$ آنگاه (31)

حساب کنید.

حل(قرار دهید:

$$\begin{aligned} u(x) &= xf(x) \Rightarrow u(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ u'(x) &= f(x) + xf'(x) \Rightarrow u'(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) \\ g(x) &= f(u) \Rightarrow g'(x) = u' f'(u) \\ g''(x) &= u''f'(u) + (u')^2 f''(u) \\ \Rightarrow g''(\mathbf{0}) &= 2f'(\mathbf{0})f'(\mathbf{0}) + (f(\mathbf{0}))^2 f''(\mathbf{0}) \\ \Rightarrow g''(\mathbf{0}) &= 2(f'(\mathbf{0}))^2 + (f(\mathbf{0}))^2 f''(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

۳) اگر توابع f و g بر \mathbb{R} مشتق پذیر باشند و

$$2g'(-2) = f(a) = f'(a) = -2$$

مقدار $(g \circ f)'(a)$ را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = (-1)(-2) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{مقدار } \frac{dy}{dx} \text{ را به ازای } t = 3 \text{ حساب کنید.} \quad \begin{cases} x = (t+2)^2 \\ y = t^3 \end{cases} \text{ اگر (33)}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2(t+2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3) = \frac{27}{2 \times 5} = \frac{27}{10}$$

اگر $(g \circ f)'(1) = 3$ و $f'(1) = -2$ باشد، حاصل $g'(-2) = ?$ را حساب کنید.

حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(1) &= g'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = 3 \times (-2) = -6 \end{aligned}$$

اگر f تابعی مشتق پذیر در a باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ را حساب کنید.

حل) مقدار $xf(x)$ را به صورت اضافه و کم کنید:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{x - a}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} x \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) - af'(a) \end{aligned}$$

ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$ در $t = 2$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 1}} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2) = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

حل)

فصل چهارم

کا رب رد مشتق

۱۴-۲-۴ تمرین صفحه ۲۹۰

(۱) ابتدا نشان دهید که هریک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه رل صدق می کند. پس مقدار c مربوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad x \in [-1, 2] \quad (1)$$

حل) چند جمله ای ها روی هر بازه شرایط قضیه رل را دارند. چون مشتق پذیرند و مشتق آنها نیز چند جمله ای است.

$$f(2) = f(-1) = 0$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x \in [-4, 0] \quad f(x) = x^3 - 16x \quad (2)$$

: حل

$$f(-4) = -64 + 64 = 0 = f(0)$$

$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} x &\in [0, 4], \quad f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} \\ f'(x) &= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (3)$$

پس تابع روی $[0, 3]$ پیوسته و روی $(0, 3)$ مشتق پذیر است.

فصل چهارم : کاربرد مشتق

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = f(3) = 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}} = \frac{4c - 3}{3c^{\frac{2}{3}}} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}}, \quad x \in [\mathbf{0}, 4] \quad (4)$$

حل :

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

پس تابع f روی $\mathbf{[0, 4]}$ پیوسته و روی $(\mathbf{0}, 4]$ مشتق پذیر است.

$$\frac{3}{4}c^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}c^{-\frac{3}{4}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{3}{4c^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2c^{\frac{3}{4}}} = \frac{3c^{\frac{1}{2}} - 2}{4c^{\frac{3}{4}}} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow c = \frac{4}{9}$$

$$x \in [-3, 7], \quad f(x) = \begin{cases} x+3 & \rightarrow x \leq 2 \\ 7-x & \rightarrow x > 2 \end{cases} \quad (5)$$

حل) این تابع در $\mathbf{[0, 2]}$ پیوسته است، پس همه جا پیوسته است و پس در $\mathbf{[0, 2]}$ مشتق پذیر نیست. لذا شرایط را ندارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$x \in [-3, 4], f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \quad (6)$$

حل) تابع در $[-3, 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in [2, 3] \quad (7)$$

(حل)

$$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

$$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{24} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$f(x) = (x - p) \sin x, \in [0, p] \quad (8)$$

حل) چند جمله ای و $\sin x$ همه جا پیوسته و مشتق پذیرند.

$$f(0) = 0 = f(p)$$

$$f'(c) = \sin c + (c - p) \cos c = 0$$

$$\Rightarrow \sin c = (p - c) \cos c$$

$$\Rightarrow \tan c = p - c$$

$$\Rightarrow c + \tan c = p$$

واضح است که $c = p$ جواب دراین بازه است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \rightarrow x < 2 \\ 5x - 4 & \rightarrow x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \in [-3, 4] \quad (9)$$

حل) این تابع در $[-3, 4]$ پیوسته نیست چون

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 9) = -5 \neq f(2) = 6$$

پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}, \quad x \in [-2, 4] \quad (10)$$

حل) این تابع در $[-2, 1] \cup [4, \infty)$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه برقرار نیست.

اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ باشد، به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{0}) &= \mathbf{0} \\ f(1) &= 1 - 2 + 2 - 1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

تابع چند جمله‌ای در قضیه رل صدق می‌کند، پس در $(\mathbf{0}, 1) \cup (1, \infty)$ حداقل یک ریشه دارد که

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = \mathbf{0}$$

به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = \mathbf{0}$ ، که در آن c یک ثابت

دلخواه است، نمی‌تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

حل) اگر $f(x) = x^3 + 2x + c$ بیش از یک ریشه داشته باشد

حداقل یک ریشه دارد که تناقض است.

با استفاده از قضیه رُل ثابت کنید معادله

$f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3$ در بازه $(\mathbf{0}, 1)$ دارد.

٦ حل المسائل ریاضی عمومی (١)

حل) $f(1) = 1$ و $f(0) = -3$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک

ریشه در $(0, 1)$ دارد. از طرفی

چون $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ دقتاً یک ریشه دارد.

(٥) ابتدا نشان دهید توابع داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کنند. سپس

مقدار c مریوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{حل})$$

پس روی $[0, 1]$ پیوسته و روی $(0, 1)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c}} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{8}{27}$$

(2)

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}, \quad x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$$

حل) تابع داده شده روی $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ پیوسته و روی $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ مشتق پذیر است،

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= -\frac{1}{(c-1)^2} \\
 \Rightarrow 1 - \frac{1}{(c-1)^2} &= \frac{f(3) - f(\frac{3}{2})}{3 - \frac{3}{2}} \\
 1 - \frac{1}{(c-1)^2} &= \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 1 \\
 \Rightarrow c &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x \in [-1, 5] \\ \begin{cases} 2x + 3, & x < 3 \\ 15 - 2, & x \geq 3 \end{cases} \end{cases}$$

حل) تابع در ۳ مشتق پذیر نیست، چون $f'_+(3) = -2$ و $f'_{-}(3) = 2$ ، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$x \in [-4, 5], f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

حل) $4 \in [-4, 5]$ در f مشتق پذیر نیست، پس شرایط برقرار نیست.

$$x \in [-5, 0], f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 3} \tag{5}$$

تابع در $[-5, 0]$ پیوسته نیست پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$x \in [-1, 5], f(x) = x^2 + 7x - 1 \tag{6}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

حل) چون f چند جمله‌ای است، شرایط برقرار است. پس

$$\begin{aligned} 2c + 7 &= \frac{f(5) - f(-1)}{6} = \frac{49 - 7}{6} = 7 \\ \Rightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

(6) نشان دهید هر چند جمله‌ای از درجه ۳ حداقل ۳ ریشه حقیقی دارد.

حل) چون مشتق چندجمله‌ای درجه ۳، چندجمله‌ای درجه ۲ است و حداقل ۲ ریشه دارد
پس چندجمله‌ای درجه ۳ حداقل ۳ ریشه دارد.

(7) نشان دهید معادله $x^5 + 3x^3 + x + 13 = 0$ دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

حل) چون درجه چند جمله‌ای فرد است، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 1$ هیچ ریشه‌ای ندارد، پس چند جمله‌ای داده شده،
دقیقاً یک ریشه دارد.

(8) نشان دهید معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$ برای $n \in N, a > 0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حل) چون چندجمله‌ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$ و $a > 0$ ، پس $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$ هیچ ریشه‌ای ندارد، پس
معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(9) نشان دهید $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ هیچ ریشه‌ای ندارد پس معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(10) نشان دهید

$$(x > 0) \text{ و } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

حل) تابع $f(t) = \ln(1+t)$ را روی بازه $[0, n]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه

فصل چهارم : کاربرد مشتق

مقدار میانگین را دارد. پس:

$$\begin{aligned}
 f'(c) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
 0 < c < x \\
 \Rightarrow \frac{1}{1+c} &= \frac{\ln(1+x)}{x} \\
 c < x \Rightarrow \frac{1}{1+x} &< \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) \\
 0 < c \Rightarrow \frac{1}{1+0} &= 1 > \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \\
 \Rightarrow \frac{x}{1+x} &< \ln(1+x) < x
 \end{aligned}$$

(11) نشان دهید.

$$(x > 0), \frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

حل) کافی است در تمرین قبل به جای x قرار دهیم داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} &< \ln(1 + \frac{1}{x}) \\
 \Rightarrow \frac{1}{1+x} &< \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

(12) اگر f بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه بسته باز

(1) موجود و صعودی باشد، نشان دهید که f نیز بر بازه $(0, 1)$ صعودی است.

حل) برای $0 < x < 1$ طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(cx)$$

$$0 < x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow cx_1 \leq cx_2$$

$f' \Rightarrow f'(cx_1) \leq f'(cx_2)$ صعودی است f'

$\Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow g$ صعودی است g

(13) فرض کنید $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$. ثابت کنید به ازای هر a و b متمایز داریم:

$$\left| f(b) - f(a) \right| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

(حل)

$$f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 1 - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \geq \frac{1}{2} \text{ لذا } 2x^2 \leq (1+x^2)^2 \text{ از طرفی پس}$$

$$f'(x) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حال اگر a و b متمایز و دلخواه باشد.

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

اگر $0 < b \leq a < \frac{p}{2}$ باشد، نشان دهید که:

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} \leq \tan a - \tan b \leq \frac{a-b}{\cos^2 a}$$

حل) تابع $f(x) = \tan x$ در نظر بگیرید.

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد است. پس:

$$\frac{\tan a - \tan b}{a-b} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

چون $\frac{1}{\cos^2 x}$ تابعی صعودی است. پس $b < c < a$

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{1}{\cos^2 c} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

لذا

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{\tan a - \tan b}{a-b} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

(15) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله $[0, 2]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$
پس تابع همه جا خصوصاً روی $[0, 2]$ پیوسته است. از حل)

طرفی:

$$f'_{-}(1) = f'_{+}(1) = 1, \quad f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

پس مشتق f همه جا خصوصاً روی $(0, 2)$ موجود است. لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

(16) ثابت کنید که معادله $x = 2^{-x}$ یک و تنها ریشه در بازه $(1, 0)$ دارد.

حل) از $x = 2^{-x}$ نتیجه می‌گیریم

حال تابع $f(x) = \log_2^x + x$ را روی فاصله $(0, 1)$ در نظر بگیرید.

$$f(1) = 1 > 0$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ریشه‌ای در دارد.

از طرفی $\log_2^x = x$ هیچ ریشه‌ای ندارد. پس $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} + 1$

دقیقاً یک ریشه دارد، لذا $x = 2^{-x}$ دقیقاً یک ریشه در $(0, 1)$ دارد.

(17) قضیه رل را بیان کرده با استفاده از آن نشان دهید که معادله $x^3 + x - 1 = 0$ یک

و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشد و

آنگاه $f'(c) = 0$ موجود است که $c \in (a, b)$.

چون معادله داده شده از درجه فرد است پس حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 3x^2 + 1$ هیچ ریشه‌ای ندارد، پس طبق قضیه رل $f(x)$ نمی‌تواند

بیش از یک ریشه داشته باشد.

$e^x \sin x = 1$ با استفاده از قضیه رل ثابت کنید بین هر دو ریشه حقیقی معادله (18)

حداقل یک ریشه $e^x \cos x = -1$ قرار دارد.

حل) $e^x \cos x = -1$ معادل است با $e^x \sin x = e^{-x}$ معادل است با

$$\cos x = -e^{-x}$$

حال تابع $f(x) = \sin x - e^{-x}$ را در نظر بگیرید. این تابع شرایط قضیه رل را داراست و

$$f'(x) = \cos x + e^{-x}$$

بنابراین بین هر دو ریشه $f'(x)$ وجود دارد.

یعنی بین هر دو ریشه $\cos x = -e^{-x}$ یک ریشه از $\sin x = e^{-x}$ وجود دارد.

. $0 < x \leq 1$ $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{1}{a+1}$ با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید. (19)

حل) طبق تمرین (11) برای $x > 0$ داریم $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$ است.

حال اگر $0 < x \leq 1$ آنگاه $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{1+x}$ بنابراین:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$a \geq 1$ با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی (20)

رابطه زیر برقرار است. (به شرط آنکه $z > 0$ باشد).

$$z \geq 0 \quad (1+z)^a \geq 1+az \quad \text{اگر}$$

حل) تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی فاصله $[0, z]$ در نظر بگیرید

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس $z < c < 0$ موجودات که

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+z)^a - az - 1}{z} = a(1+c)^{a-1} - a \geq 0$$

چون $c > 0$ است پس $(1+z)^a \geq 1 + az$

اگر $0 < z < 0$ در نظر می‌گیریم $f(x) = (1+x)^a - ax$ تابع را دروی

$$\begin{aligned} \frac{f(0) - f(z)}{0 - z} &= f'(c) \\ \frac{1 - (1+z)^a + az}{0 - z} &= (1+c)^a - a \leq 0 \\ \Rightarrow 1 + az &\leq (1+z)^a \end{aligned}$$

(٢١) با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 - 12x$ فقط

یک ریشه در $[-1, 1]$ دارد.

(حل)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 16x - 12 \\ f''(x) &= 12x^2 - 16 \\ f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 &= \frac{16}{12} \Rightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ریشه‌های $f''(x)$ خارج $[-1, 1]$ قرار ندارند پس $f'(x)$ حداقل یک ریشه در $[-1, 1]$ دارد.

از طرفی $f'(-1) = -4 + 16 - 12 = 0$ و این تنها ریشه تابع مشتق است.

(٢٢) ثابت کنید که تابع $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ در فاصله $[0, 1]$ تنها یک

ریشه دارد.

حل) $f(1) = 8 > 0$ ، $f(0) = -2 < 0$ دارد. از پس حداقل یک ریشه در $[0, 1]$ دارد. از طرفی:

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3 > 0$$

$f'(x)$ هیچ ریشه‌ای ندارد پس دقیقاً یک ریشه دارد.

(23) فرض کنید $f(x)$ روی $[0, 1]$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند

$$c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1) \quad 0 < c < 1 , \quad c$$

حل) تابع $h(x) = x^2 f(x)$ روی فاصله $[0, 1]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد است پس:

$$\begin{aligned} 0 < c < 1 , \quad \frac{h(1) - h(0)}{1-0} &= h'(c) \\ 0 < c < 1 , \quad \frac{f(1) - 0}{1} &= c^2 f'(c) + 2cf(c) \\ \Rightarrow c^2 f'(c) + 2cf(c) &= f(1) \end{aligned}$$

. ۳۰۰ صفحه ۴-۳-۸

(1) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x) &= -x^5 - 4x + 2 \\ f'(x) &= 5x^4 - 4 = -(5x^4 + 4) < 0 \\ &\text{همواره نزولی است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f(x) &= x^4 - 2x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \end{aligned}$$

تابع روی $[0, 1]$ نزولی $[1, +\infty)$ تابع صعودی روی

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

تابع صعودی و روی $[-1, \mathbf{0}]$ نزولی است.

$$3) \quad f(x) = \frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(-x+1+2x-4)}{(x-1)^4} = \frac{(x-3)}{(x-1)^3}$$

تابع روی $(1, 3)$ نزولی و روی $(-\infty, 1)$ و $(3, +\infty)$ صعودی است.

$$4) \quad f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \mathbf{0} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تابع روی $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ صعودی و روی $(\sqrt{2}, 2)$ و $(-2, -\sqrt{2})$ نزولی است.

$$5) \quad f(x) = [x]$$

تابع جزء صحیح همه جا صعودی است.

$$6) \quad f(x) = |x| - |x+1|$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow x < -1 \\ -2x-1 \rightarrow -1 \leq x < \mathbf{0} \\ -1 \rightarrow \mathbf{0} \leq x \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = x + \cos x$$

$$f'(x) = 1 - \sin x \geq \mathbf{0}$$

همواره صعودی است.

$$8) \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

تابع روی $(-1, 1)$ صعودی و روی $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است.

$$9) \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0$$

. $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ تابع همواره نزولی است. چون

$$10) \quad f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2}$$

تابع روی $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ نزولی و روی $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ صعودی است.

$$11) \quad f(x) = x\sqrt{5-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

تابع روی $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ و $\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ صعودی و روی $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ نزولی است.

$$12) \quad f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = -(x-1)^{-\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow \text{همواره نزولی است}$$

$$13) \quad f(x) = x^3(x-2)^2$$

$$f'(x) = 3x^2(x-2)^2 + 2x^3(x-2) = x^2(x-2)(3x-6+2x) = x^2(x-2)(5x-6)$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

تابع روی $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right)$ و صعودی و روی $(2, +\infty)$ و نزولی است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x + \cos x - 2 \\ f'(x) &= -\sin 2x - \cos x = -\cos x(2\sin x + 1) \\ &= -2\cos x(\sin x + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (14)$$

تابع نزولی $\Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\Rightarrow f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع نزولی $\Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\Rightarrow f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع نزولی $\Rightarrow f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow$

تابع صعودی $\Rightarrow f'(m) > \mathbf{0} \Rightarrow$

$\mathbf{0} < x < \frac{p}{2}$ با فرض (2) ، نامساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x < x$

حل) تابع $f(t) = \sin t$ در نظر بگیرید

شرط قصیه مقدار میانگین را دارد پس.

فصل چهارم : کاربرد مشتق

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos c < 1 \Rightarrow \sin x < x$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (ب)$$

$$\text{حل) تابع } f(t) = \sin t + \frac{t^3}{6} \text{ در نظر بگیرید}$$

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x + \frac{x^3}{6}}{x} = \cos c + \frac{c^2}{3} > 1 \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

(3) نشان دهید.

$$(x > 0)$$

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc tan} t < x$$

$$\text{حل) تابع } f(t) = \operatorname{Arc tan} t \text{ در نظر بگیرید}$$

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\operatorname{Arc tan} x - 0}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \quad \text{لذا } 0 < c < x \quad \text{چون}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\operatorname{Arc tan} x}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arc tan} x < x$$

$$\text{با فرض } 0 < x < 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x - \ln(1+x) \quad \text{نشان دهید.} \quad (4)$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

حل) تابع $f(t) = t - \ln(1+t)$ و $g(t) = t^2$ روی شرایط قضیه مقدار

میانگین را دارند، پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{1+c}}{2c} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{c}{1+c}/2c \\ \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= \frac{1}{2(1+c)} \end{aligned}$$

از طرفی چون $0 < c < x < 1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

($x > 0$) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ نشان دهید: (5)

حل) به تمرین صفحه 292 مراجعه کنید.

$$\frac{2}{p}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{p}{2} \quad \text{نامساوی زیر را ثابت کنید: (6)}$$

حل) نامساوی $\sin x < x$ در تمرین 2 قسمت الف نشان داده شد.

برای $x > 0$ تابع $f(t) = \sin t - \frac{2}{p}t$ در نظر بگیرید، این تابع را روی فاصله $\left[x, \frac{p}{2}\right]$ در نظر بگیرید، این تابع

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

$$\frac{f\left(\frac{p}{2}\right) - f(x)}{\frac{p}{2} - x} f'(c) \Rightarrow \frac{\mathbf{0} - (\sin x - \frac{2}{p}x)}{\frac{p}{2} - x} = \cos c - \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{\sin x - \frac{2}{p}x}{\frac{p}{2} - x} = \frac{2}{p} - \cos c$$

$$\tan x + \sin x > 2x \quad \text{باشد نشان دهید:} \quad \mathbf{0} < x < \frac{p}{2} \quad (7)$$

(8) فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و f'' در فاصله (a, b) همواره موجود و مثبت باشد. نشان دهید.

$$\forall x, y \in [a, b]: f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

(9) اگر f در بازه $[0, 1]$ پیوسته و $f'(0) = \mathbf{0}$ و اگر $f'(x)$ بر بازه $(0, 1)$ موجود و

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{صعودی باشد. نشان دهید که} \quad \text{نیز بر بازه } (0, 1) \text{ صعودی است.}$$

حل) به تمرین 12 صفحه 292 مراجعه کنید.

نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$1) \quad f(x) = 4x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(4x + 3) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \left\{ \mathbf{0}, -\frac{3}{4} \right\}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4 + 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \{-2, 2\}$$

$$3) \quad f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

$$f'(x) = \sin^2 x - \cos x = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \cos x = \mathbf{0}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \left\{ kp + \frac{p}{2}, 2kp + \frac{p}{6}, 2kp + \frac{5p}{6} \right\}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -x + 3 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. پس $x = 2$ نقطه بحرانی است.

فصل چهارم : کاربرد مشتق

$$\begin{aligned}
 5) \quad f(x) &= x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} \\
 f'(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{7x^2 + 4x - 3}{3x^{\frac{2}{3}}} = \mathbf{0} \rightarrow 7x^2 + 4x - 3 = \mathbf{0} \\
 &\Rightarrow \left\{ \mathbf{0}, -1, \frac{3}{7} \right\} \Rightarrow \text{پس نقاط بحرانی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad f(x) &= \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)} \\
 f'(x) &= \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}} \\
 3x^2 - 6x &= \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0}, 2 \\
 x^3 - 3x^2 + 4 &= \mathbf{0} \Rightarrow (x-2)^2(x+1) = \mathbf{0} \Rightarrow x = 2, -1 \\
 &\text{به ازای } x = 2 \text{ مشتق موجود است پس} \\
 &\Rightarrow \left\{ \mathbf{0}, -1 \right\} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}
 \end{aligned}$$

$$7) \quad f(x) = \frac{(x+1)}{(x^2 - 5x + 4)} \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned}
 D_f &= R - \{1, 4\} \\
 f'(x) &= \frac{x^2 - 5x + 4 - 2x^2 - 2x + 5x + 5}{(x^2 - 5x + 4)^2} \\
 \Rightarrow -x^2 - 2x + 9 &= \mathbf{0} \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = \mathbf{0} \\
 x &= \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}
 \end{aligned}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$8) \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$D_f = [\mathbf{0}, +\infty]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x - 4}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

نقطه بحرانی

تمرين صفحه 313-21-3-4

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0}, x = 2 \quad (1)$$

$x = \mathbf{0} \Rightarrow f''(\mathbf{0}) = -6 \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \Rightarrow$ مینیمم نسبی

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x \\ f'(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x = \mathbf{0} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4} \\ f''(x) &= -\cos x \end{aligned} \quad (2)$$

$x = \frac{p}{4} \Rightarrow f''(\frac{p}{4}) - \cos(\frac{p}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = \frac{3p}{4} \Rightarrow f''(\frac{3p}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ مینیمم نسبی

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -4x^3 + 3x^2 + 18x \\
 f'(x) &= -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x^2 - x - 6) = 0 \\
 \Rightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{3}{2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -24x + 6 \\
 x = 2 \Rightarrow f''(2) &< 0 \Rightarrow \text{ماکریمم نسبی} \\
 x = -\frac{3}{2} \Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) &> 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\
 f'(x) &= 6x^2 - 18x = 6x(x - 3) \Rightarrow x = 0, x = 3 \\
 f''(x) &= 12x - 18
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 x = 0 \Rightarrow f''(0) &= -18 < 0 \Rightarrow \text{ماکریمم نسبی} \\
 x = 3 \Rightarrow f''(3) &= 18 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 2(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}) = 2(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}) = 0 \Rightarrow x = 1 \\
 f''(x) &= -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$f(x) = (x - 3)^4 \Rightarrow x = 3 \text{ مینیمم نسبی دارد.} \quad f(6)$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$f(x) = (x-4)^2 \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [\mathbf{0}, +\infty]$$

$$f'(x) = 2(x-4)\sqrt{x} + (x-4)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(x-4) + (x-4)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = \mathbf{0} \Rightarrow x = 4, x = \frac{4}{5}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(10x-24) - \frac{1}{\sqrt{x}}(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(10x-24) - (x-4)(5x-4)}{2x}$$

$$f''(4) = \frac{8 \times 16}{8} = 16 > \mathbf{0} \Rightarrow f \text{ در } 4 \text{ مینیمم نسبی}$$

$$f''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{8}{5} \times (-4)}{\frac{8}{5}} < \mathbf{0} \Rightarrow f \text{ در } \frac{4}{5} \text{ ماکریمم نسبی}$$

$$f(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{9} = \frac{-81 + 2x^3}{9x^2} = \mathbf{0} \Rightarrow x^3 = \frac{81}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} \quad (8)$$

مینیمم نسبی

$$f''(x) = \frac{18}{x^3} + \frac{2}{9} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{81}{2}}\right) > \mathbf{0} \Rightarrow$$

فصل چهارم : کاربرد مشتق

۲۷

فصل پنجم

ضد مشتق

۳۵۰ تمرین صفحه ۹-۲-۵

(۱) هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید:

$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x-2)^4 3dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^5}{5} + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} + c \quad (\text{ب})$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx \quad (\text{ج})$$

$$2udu = dx \quad u^2 = 1+x \quad \text{قرار دهید} \quad \text{پس}$$

$$\begin{aligned} \int (u^2 - 1)^2 2u^2 du &= 2 \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= 2 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= 2 \left(\frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$u^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow udu = xdx$$

$$\int (u^2 + 1) u du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + c = \frac{(x^2 - 1)^2}{4} + \frac{x^2 - 1}{2} + c \quad (\text{د})$$

$$\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{ه})$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned} u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2\int (u-1)^2 du = \frac{2}{3}(u-1)^3 + c \\ = \frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}} &= -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx = -\frac{1}{6} \times 2\sqrt{1-x^6} + c \\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6} + c \end{aligned} \quad (٦)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}} &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ u^2 = 1+x^2 \Rightarrow udu &= xdx \\ \int \frac{udu}{\sqrt{1+(u^2-1)u^3}} &= \int \frac{udu}{\sqrt{1-u^3+u^5}} \end{aligned} \quad (٧)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^3} &= \int \frac{(x+1)dx}{((x+1)^2+1)^3} \\ u = (x+1)^2+1 \Rightarrow \frac{du}{u^3} &= \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{4((x+1)^2+1)^2} + c \end{aligned} \quad (٨)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx; u = 2\sin x \Rightarrow du = 2\cos x dx \\ \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \frac{1}{4} \int \cot^2 x \cdot \csc^2 x dx = -\frac{1}{12} \cot^3 x + c \end{aligned} \quad (٩)$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} dx$$

$$u = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 + 1)dx$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + c \quad (\textcircled{s})$$

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$u^3 = 1-x \Rightarrow -3u^2 du = dx$$

$$-3 \int (1-u^3)^2 u^3 du = -3 \int (u^3 - 2u^6 + u^9) du$$

$$= -3 \left(\frac{u^4}{4} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^{10}}{10} \right) + c$$

$$= -3 \left(\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10} \right) + c \quad (\textcircled{s})$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} + c \quad (\textcircled{j})$$

$$\int x \sqrt[5]{5-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt[5]{5-x^2} (-2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} (5-x^2)^{\frac{6}{5}} + c \quad (\textcircled{m})$$

فرض کنید $f(x) = |x|$ و تابع F به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

نشان دهید F یک ضد مشتق f روی $(-\infty, +\infty)$ است.

$$F'(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases} = f(x) \quad (\text{حل})$$

تمرین صفحه ۳۵۵ . ۱۳-۳-۵

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} \text{ را حل کنید.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \\ &= \int \sec^4 x dx + 4 \int \frac{dx}{(\sin 2x)^2} = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx + 4 \int \csc^2 2x \\ &= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2 \cot 2x + c \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

تمرین صفحه ۳۵۷ . ۲۰-۳-۵

(۱) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\tan^2 x + 1) dx + \int dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^4 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan^4 x dx \\ &= \int \tan^4 x \cdot \sec^2 x dx - \int \tan^4 x dx \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx \\
 &= \int \frac{\cos x(1 - \sin^2 x)}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx \\
 &= -\frac{1}{8 \sin^8 x} + \frac{1}{6 \sin^6 x} + c
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sec^4 x \cdot \cot^6 x dx &= \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x} dx = \int \frac{\sec^2 x(1 + \tan^2 x)}{\tan^6 x} dx \\
 &= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^6 x} dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} dx = -\frac{1}{5 \tan^5 x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + c
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$5) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^9 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^9 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx \\ = \frac{1}{8\cos^8 x} - \frac{1}{6\cos^6 x} + c$$

$$6) \quad \left| \csc^4 x \cdot \cot^7 x dx - \right| \csc^2 x (\cot^2 x - 1) \cot^7 x dx \\ = \int \cot^9 x \cdot \csc^2 x dx - \int \cot^7 x \cdot \csc^2 x dx \\ = -\frac{\cot^{10} x}{10} + \frac{\cot^8 x}{8} + c$$

$$7) \quad \int \cos x \sec^2(\sin x) dx = \int \frac{\sin x \cot x}{\cos^2 x} dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2\cos x} + c$$

$$8) \quad \int \sin^3 2x \cdot \cos^5 2x dx = \int \sin 2x (1 - \cos^2 2x) \cos^5 2x dx \\ = \int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx - \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx \\ = -\frac{1}{12} \cos^6 2x + \frac{1}{16} \cos^8 2x + c$$

$$9) \quad \int \frac{\tan x (1 + \tan x)^{10}}{\cos^2 x} dx = \int u (1 + u)^{10} du \\ \left(u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \right) \\ = \int (u+1)^{11} - (u+1)^{10} du = \frac{(u+1)^{12}}{12} - \frac{(u+1)^{11}}{11}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} = \int \frac{\sin x dx}{(\cos x + 1)^2} \\
 & (u = \cos x + 1 \Rightarrow -du = \sin x dx) \\
 & = - \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\cos x + 1} + c
 \end{aligned}$$

فرض کنید (2) $I_n = \int \tan^n x dx$. یک فرمول بازگشتی برای محاسبه I_n بیابید، و I_6 را محاسبه کنید.
 (حل)

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^n x (\sec^2 x - 1) dx = \tan x \\
 &= \int \tan^{n-1} x \cdot \tan^2 x dx - \int \tan^{n-2} x (\sec^{n-2} x - 1) dx \\
 &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} + c \\
 \Rightarrow I_n + I_{n-2} &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + c \\
 I_2 &= \int \tan^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x \\
 I_4 &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \\
 I_6 &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c
 \end{aligned}$$

(3) معادله دسته منحنی هایی را بباید که ضریب زاویه خطوط مماس در هر نقطه (x, y)

از آن برابر $y = -\frac{\bar{x}}{x}$ باشد.
(حل)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} &\Rightarrow y dy = -x dx \\ &\Rightarrow |y dy| = -|x dx| + c \end{aligned}$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c$$

معادله دسته مخفی‌ها، دوایبر بر مرکز مبدأً مختصات است.

(٤) معادله مخفی را بباید که از نقطه (٢، ٩) گذشته و معادله ضریب زاویه مماس برخی

$3x^2$ باشد.

$$\begin{aligned} y = 3x^2 &\Rightarrow y = \int 3x^2 dx + c \\ &y = x^3 + c \\ 9 = 8 + c &\Rightarrow c = 1 \\ y = x^3 + 1 & \end{aligned}$$

(حل)

معادله $y' - 2x = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} y' = 2x &\Rightarrow y = \int 2x + c \\ &= x^2 + c \end{aligned}$$

(حل)

(٦) مشتق تابعی برابر $\sqrt{x+3}$ است. هرگاه مقدار به ازای $x=1$ برابر ١ باشد، تابع را

بباید.

$$\begin{aligned}
 y' = \sqrt{x+3} &\Rightarrow y = \int \sqrt{x+3} + c \\
 &\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c \\
 (1, 1) \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times c &\Rightarrow c = -\frac{13}{3} \\
 y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} - \frac{13}{3} & \quad (\text{حل})
 \end{aligned}$$

(7) هر یک از انتقالهای زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1+\cos x)^2} &= -\frac{1}{1+\cos x} + c \\
 \int \cos^6 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1+\cos 2x)^3 \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad &= \frac{1}{8} \int (1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left(\int dx + 3 \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{2} \int (1+\cos 4x) \, dx + \int \cos 2x (1-\sin^2 2x) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin x (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx \\
 &= \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx - 2 \int \sin x \cdot \cos 4x \, dx + \int \sin x \cdot \cos^6 x \, dx \\
 &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{\cos^7 x}{7} + c
 \end{aligned}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$4) \int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}} dx = \int \cos 3x (1 - \sin^2 3x) \sin^{-\frac{1}{3}} 3x dx$$

$$= \int \sin^{-\frac{1}{3}} 3x \cdot \cos 3x dx - \int \sin^{\frac{5}{3}} x \cdot \cos 3x dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{\frac{2}{3}} 3x + \frac{1}{8} \sin^{\frac{8}{3}} 3x + c$$

$$5) \int \sin 3y \cos 3y dy = \frac{1}{6} \sin^2 3y + c$$

$$6) \int \cos t \cdot \cos 3t dt = \frac{1}{2} \int (\cos 2t + \cos t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} \sin t + c$$

$$7) \int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x = \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos x) \sin 5x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\sin \frac{7}{2}x + \sin \frac{3}{2}x \right) dx - \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 2x) dx$$

$$= \frac{-1}{7} \cos \frac{7}{2}x - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}x + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$$8) \quad \int \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16} \int (2\sin x \cos x)^4 dx \\ = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx = \frac{1}{32} \int (1 - \cos 4x)^2$$

$$= \frac{1}{32} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx \\ = \frac{1}{32} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + c$$

$$9) \quad \int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\ \left(u = 1 + \sin^2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = \sin(x-1) \cos(x-1) dx \right)$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u \sqrt{u} + c = \frac{1}{3} (1 + \sin^2(x-1)) \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} + c$$

$$10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 4 \int \frac{dx}{(2\sin x \cos x)^2} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \cot 2x + c$$

$$11) \quad \int \sqrt{- + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \left(\cos \frac{13}{4}x + \cos \frac{7}{4}x + \cos \frac{11}{4}x + \cos \frac{9}{4}x \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{13} \sin \frac{13}{4}x + \frac{4}{7} \sin \frac{7}{4}x + \frac{4}{11} \sin \frac{11}{4}x + \frac{4}{9} \sin \frac{9}{4}x \right) + c$$

٤

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$12) \quad \int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 x} dx \\ = \frac{1}{3} \tan 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + c$$

$$13) \quad \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}} dx \quad u = \sin x - \cos x \Rightarrow du = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$14) \quad \int x^{n-1} \sin x^n dx \quad u = x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{n} = x^{n-1} dx \\ = \frac{1}{n} \int \sin u du = -\frac{1}{n} \cos x^n + c$$

$$15) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx = \int \sin x \frac{1-\cos x^n x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx \\ = \int \cos^{-\frac{3}{5}} x \cdot \sin x dx - \int \cos^{\frac{13}{5}} x \cdot \sin x dx \\ = -\frac{5}{2} \cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{18} \cos^{\frac{18}{5}} x + c$$

$$16) \quad \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx = - \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1+\cos x} + c$$

$$17) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}, \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ I = 2 \int \frac{du}{\sin^2 u} = -2 \cot(\sqrt{x}) + c$$

٤١

فصل پنجم : ضد مشتق

$$18) \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}, \quad u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \tan x^2 + c$$

$$19) \quad \int \sin x (1 + \cos x)^5 dx = - \int u^5 du = - \frac{(1 + \cos x)^6}{6} + c$$

$$20) \quad \int \sin 2x \sqrt{2 + \sin^2 x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + c$$

فصل ششم

انتگرال معین

364-7 نکریم صفحه

با استفاده تعريف حد، انتگرال تابع $f(x) = x^2$ را در فاله $[0, 1]$ بیابید.

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

366-2 تمرین صفحه

در شی تساوی‌های زیر ثالث کنید.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{الف})$$

حل) اگر $\Delta y_i = \Delta x_i$ باشد آنگاه $\{x_0, x_1, \dots, x_8\}$ افزایی از $[a, b]$ برای بازه

$[b, a]$ به کار می‌رود پس

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{D}_i) \Delta x_i = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{D}_i) \Delta y_i \\ &= \int_b^a f(x) dx \\ \int_b^a f(x) dx &= \mathbf{0} \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

حل) طبق خاصیت الف)

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= - \int_a^a f(x) dx \\ \Rightarrow 2 \int_b^a f(x) dx &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \int_b^a f(x) dx = \mathbf{0} \end{aligned}$$

368-5 تمرین صفحه

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

قضیه ۶-۲-۴ . فرض کنید f در بازه‌ای شامل نقاط a, b, c پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

اثبات) اگر $a < c < b$ اثبات تساوی از قضیه ۳-۲-۶ حاصل می‌شود.
بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a < c < b$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\ \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

۳۶۹. تمرین صفحه ۶-۲-۷

قضیه ۶-۲-۴ . اگر f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشد و برای ره $x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad \text{آنگاه } f(x) \geq g(x)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}_i) &\geq g(\mathbf{D}_i) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{D}_i) \Delta x_i \geq g(\mathbf{D}_i) \Delta x_i \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i &\geq \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i \\ \Rightarrow \quad \lim \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i &\geq \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i \\ \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx &\geq \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

۲) اگر f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و برای هر x در فاصله

$$\int_a^b f(x) dx \geq \mathbf{0} \quad \text{انگاه } f(x) \geq \mathbf{0}$$

اثبات : طبق قضیه ٤-٢ داریم

: اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a, b]$ $f(x) < \mathbf{0}$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \mathbf{0}$$

(حل)

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \mathbf{0} dx = \mathbf{0}$$

.371 تمرین صفحه ٦-٢-١٢

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \right)$ حد (١) را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

(حل)

$$\text{حد} = 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 = 8 \int_0^1 x^2 dx$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2}$ حد (٢) را به صورت انتگرال معین بنویسید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned} \lim \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} &= \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{i^2} = \lim \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\left(\frac{i}{n}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

(۳) با استفاده از تعریف انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(الف)

$$\int_{-1}^1 |x| dx$$

(حل)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| dx &= 2 \int_0^1 dx = 2 \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right) = 2 \lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1 \end{aligned}$$

(ب)

$$J = \int_3^5 [x] dx$$

$$\text{حل) می‌دانیم } \int_a^b kdx = k(b-a)$$

$$\begin{aligned} J &= \int_3^4 [x] dx + \int_4^5 [x] dx = \int_3^4 3 dx + \int_4^5 4 dx \\ &= 3(4-3) + 4(5-4) = 3 + 4 = 70 \end{aligned}$$

(۴) اگر تابع f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

حل) چون برای هر $x \in [a, b]$ داریم: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

داریم: $6 - 2 - 6$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

پس

(5) فاصله‌هایی را معین کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرد.

(الف)

$$\int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\text{ردیف} [-1, 1] \quad f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{تابع} \quad \text{حل}$$

$$\begin{aligned} \max f(x) &= f(1) = 2\sqrt{2} \\ \max f(x) &= f(-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 f(x) dx \leq 2\sqrt{2}(2 - (-1))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \leq 6\sqrt{2}$$

(ب)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

$$\text{ردیف} \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} \quad \text{تابع} \quad \text{حل}$$

است پس

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\max f(x) = 1$$

$$\min f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\bar{P}}{2} \leq \int_{\mathbf{0}}^{\bar{n}} f(x) dx \leq \frac{\bar{n}}{2}$$

(ج)

$$\int_1^4 |x-2| dx$$

$$\max |x-2| = |4-2| = 2$$

$$\min |x-2| = |2-2| = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{0} \leq \int_1^4 |x-2| dx \leq 6$$

(د)

$$\int_{-5}^2 \frac{x+5}{x-3} dx$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3} \quad (\text{حل نزولی است پس})$$

$$\max f(x) = f(-5) = \mathbf{0}$$

$$\min f(x) = f(2) = -7$$

$$\Rightarrow -49 \leq \int_{-5}^2 f(x) dx \leq \mathbf{0}$$

$$\int_{\mathbf{0}}^1 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx \quad , \quad \int_{\mathbf{0}}^1 x dx \geq \int_{\mathbf{0}}^1 x^2 dx \quad (6) \quad \text{بدونه محاسبه انتگرال نشان دهید}$$

حل) تابع $f(x) = x - x^2$ را در نظر بگیرید داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \leq x \leq 1 &\Rightarrow f(x) \geq \mathbf{0} \Rightarrow x \geq x^2 \Rightarrow \int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx \\ \mathbf{0} \geq 1 &\Rightarrow f(x) \leq \mathbf{0} \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow \int_0^2 x dx \leq \int_0^2 x^2 dx \end{aligned}$$

اگر f روی $[-1, 2]$ پیوسته باشد نشان دهید:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx = \mathbf{0}$$

حل) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ \Rightarrow \quad &\int_{-1}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx - \int_1^0 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \quad &\int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx = \mathbf{0} \end{aligned}$$

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و $\int_a^b f(x) dx = \mathbf{0}$ نشان دهید حداقل عددی نظری
در فاصله $[a, b]$ قرار دارد به طوری که a

حل) طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} \min f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} &\leq \max f(x) \\ \min f(x) \leq \rightarrow &\bullet \leftarrow \leq \max f(x) \end{aligned}$$

پس

حال طبق قضیه مقدار میانی $f(a) = \mathbf{0}$ وجود دارد که a باشد.

(9) مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ما

حل المسائل رياضي عمومي (١)

الف) برقرار باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

را در نظر بگيريد. داريم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{2} = 0 = f(0)$$

(10) اگر f روی $[-1, 4]$ انتگرال پذير باشد و مقدار متوسط تابع f روی $[-1, 4]$ باشد، مقدار

برابر ٣ باشد، مقدار $\int_{-1}^4 f(x) dx$ را بدست آوريد.

(حل)

$$\frac{\int_{-1}^4 f(x) dx}{5} = 3 \Rightarrow \int_{-1}^4 f(x) dx = 15$$

تمرين ١٣-٣-٦ صفحه ٣٧٨

(1) فرض کنيد f بر $[-a, a]$ پيوسته و فرد باشدو ثابت کنيد.

(حل)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(-x) (-dx) + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

(2) در تمرين ١ اگر f زوج باشد، ثابت کنيد که:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= 2 \int_0^a f(x) dx \\
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

(3) انتگرالهای زیر را حل کنید:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad (\text{الف})$$

$$\text{اگر قرار دهیم } u = \frac{p}{2} - x \quad \text{و داریم } du = -dx \quad \text{پس}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}} (-du) = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du \\
 I + I &= 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du \\
 &= \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{p}{2}
 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx \quad (\text{ب})$$

$$\text{حل) اگر قرار دهیم } u = \frac{p}{2} - x \quad \text{و داریم } du = -dx \quad \text{پس}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned}
 I &= -\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du \\
 I + I &= 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m u}{\sin^m u + \cos^m u} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du = \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \\
 \Rightarrow I &= \frac{p}{4}
 \end{aligned}$$

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (4)

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_{-2}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx \\
 \text{(الف)} \quad F'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{\sin \sqrt{t}}{1 + \sqrt{1+t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_a^g f(x) dx \\
 \text{(ب)} \quad F'(t) &= g'(t) f(g(t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_{-x}^x |t| dt \\
 \text{(ج)} \quad F(x) &= 2 \int_0^x t dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 2x \\
 F(x) &= \int_{-x}^x \frac{dt}{3+t^4} \\
 F(x) &= 2 \int_0^x \frac{dt}{3+t^4} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2}{3+t^4} \quad \text{(د)}
 \end{aligned}$$

حد زیر را محاسبه کنید. (5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

(6) در توابع خصمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید.

$$\int_0^y \cos^2 t dt + \int_0^x \sin^2 t dt = \mathbf{0} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin^2 t dt}{\frac{d}{dx} \int_0^y \cos^2 t dt} = -\frac{2x \sin^2 x^2}{\cos^2 y} \quad (\text{حل})$$

$$\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = \mathbf{0} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx} \int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz}{\frac{d}{dy} \int_0^y \cos t dt} = -\frac{\sqrt{3 - 2 \sin^2 x}}{\cos y} \quad (\text{حل})$$

(7) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{و } du = dx \quad \text{پس } u = x - \frac{p}{2} \quad (\text{حل}) \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$I = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\left(u + \frac{p}{2}\right) \cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{u \cos u}{1 + \sin^2 u} du + \frac{p}{2} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

٥

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$= p \int_{\mathbf{0}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du = p \left. \operatorname{Arc tan}(\sin u) \right|_{\mathbf{0}}^{\frac{p}{2}}$$
$$= \frac{p^2}{4}$$

$I = \int_0^p \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = \mathbf{0}$ فرض کنید K عددی صحیح باشد ثابت کنید:

$$u = x - \frac{p}{2} \quad \text{حل) قرار می دهیم}$$

و $du = dx$ پس

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2k(u + \frac{p}{2})}{\sin(u + \frac{p}{2})} du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin(2ku + p)}{\cos u} du \\ &= - \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2ku}{\cos} du = \mathbf{0} \end{aligned}$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است.

$I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos x}$ تغییر متغیر $x = 2t$ را به کار ببریم داریم (9)

$$I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos} = \int_0^0 \frac{2dt}{(1+t^2)(5 - \frac{1+t^2}{1-t^2})} = \mathbf{0}$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا $\frac{1}{5-2\cos} > \mathbf{0}$, مورد اشتباه را بیابید.

حل) با تغییر $t = \frac{x}{2}$ به $[0, 2p]$ برده می شود که در حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$ فرض کنید $f(x)$ دلخواه باشد، ثابت کنید:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{حل) تابع } f(x) \text{ را می توان به صورت}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ زوج و $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ فرد است. پس نوشته که

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx + \int_{-a}^a \frac{f(x) - f(-x)}{2} dx$$

$$= 2 \int_0^a \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx + 0 = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$$

$$I = \int_0^{2p} f(x) \cos x dx \quad (11)$$

را با تغییر متغیر $t = \sin x$ تغییر دهید.

$$t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$I = \int_0^1 f(\arcsin t) dt + \int_1^0 f(\arcsin t) dt + \int_0^{-1} f(\arcsin t) dt + \int_{-1}^0 f(\arcsin t) dt$$

(12) درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad (\text{الف})$$

حل) اگر قرار دهیم $u = a+b-x$ پس داریم:

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = - \int_b^a f(u) du = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^t f(x) g(t-x) dx = \int_0^t g(x) f(t-x) dx \quad (\text{ب})$$

حل) قرار دهید $u(t) = 0$, $u(0) = t$ و $du = -dx$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) g(t-x) dx &= - \int_t^0 f(t-u) g(u) du \\ &= \int_0^t g(u) f(t-u) du = \int_0^t g(x) f(t-x) dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx \quad (ج)$$

لذا $u\left(\frac{p}{2}\right) = 0$ ، $u(0) = \frac{p}{2}$ ، $du = -dx$ پس $u = \frac{p}{2} - x$ حل) اگر قرار دهیم داریم:

$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = - \int_{\frac{p}{2}}^0 \sin^m \left(\frac{p}{2} - u\right) du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m u du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx$

(13) با توجه به مسئله 12 (ج) انتگرال های را محاسبه کنید.

حل) طبق مسئله قبل داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin^2 + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx &= \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

(14) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^p f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x) dx \quad (الف)$$

(حل)

پس $u(p) = -\frac{p}{2}$ ، $u(0) = \frac{p}{2}$ ، $du = -dx$ آنگاه $u = \frac{p}{2} - x$ اگر قرار دهیم

$$\int_0^p f(\sin x) dx = - \int_{-\frac{p}{2}}^0 f(\cos u) du = \int_{-\frac{p}{2}}^0 f(\cos u) du = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx$$

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

علت آخری این است که $f(\cos u)$ تابعی زوج است.

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2} \int_0^p f(\sin x)dx \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$u(p) = -\frac{p}{2}, \quad u(0) = \frac{p}{2}, \quad du = -dx \quad \text{داریم} \quad u = \frac{p}{2} - x \quad \text{اگر قرار دهیم}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^p xf(\sin x)dx &= -\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - u\right) f(\sin \frac{p}{2} - u) du = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(\cos u) du \\ &= \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} uf(\cos u) du = p \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx \end{aligned}$$

چون $f(\cos u)$ فرد و تابع $f(\cos a)$ زوج است.

(15) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^p \sqrt{\sin^2 x} dx = \int_0^p \sqrt{\sin x} dx \\ &= -\cos \left| \begin{matrix} p \\ 0 \end{matrix} \right| = 2 \end{aligned}$$

(16) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$(الف) \quad \int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x dx = 2 \int_0^L \cos \frac{mp}{L} x dx = \frac{2L}{mp} \sin \frac{mp}{L} x \Big|_0^L = 0$$

$$\text{ب) } \int_{-L}^L \sin \frac{mp}{L} x dx = 0 \quad \text{تابع فرد است}$$

$$\text{ج) } \int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x dx = \sin \frac{mp}{L} x dx = 0. \quad \text{چون تابع فرد است.}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ثابت کنید} \quad G(x) = \int_1^x t dt, \quad F(x) = \int_0^x u du \quad \text{اگر (17)}$$

(حل)

$$F(x) = \int_0^x u du$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \int_1^x u du$$

(18) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{(الف)}$$

(حل)

$$\begin{aligned} \text{د) } &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad \text{(ب)}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\text{حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2}{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{p}{n} + \sin \frac{2p}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)p}{n} \right) \quad (ج)$$

(حل)

$$\text{حد} = \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{p}{n} \sin p \left(\frac{i}{n} \right) = \frac{1}{p} \int_0^p \sin x dx = -\frac{1}{p} \cos x \Big|_0^p = \frac{2}{p}$$

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \quad (19) \text{ فرض کنید} \quad B(m,n) = B(n,m) \text{ اولاً تساوی}$$

کنید، ثانیاً ثابت کنید که

$$B(m,n) = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} x \cdot \cos^{2n+1} x dx$$

حل) اولاً اگر قرار دهیم $u = 1-x$ پس داریم:

$$B(m,n) = - \int_0^1 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = (n,m)$$

ثانیاً: اگر قرار دهیم $dx = 2 \sin t \cos dt$, $(1-x) = \cos^2 t$ آنگاه $x = \sin^2 t$ و کرانها به

$$\left[0, \frac{p}{2} \right] \text{ تبدیل می شود. پس داریم:}$$

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m} t \cdot \cos^{2n} t \cdot 2 \sin t \cos dt = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} t \cdot \cos^{2n+1} t dt$$

$$I = \int_3^6 xy \, dx \quad ، \text{ مطلوب است، محاسبه} \quad y = 2 \sin q, x = 6 \cos q \quad (20) \text{ با فرض}$$

$$q = \frac{p}{6} \quad \text{انگاه} \quad x = 3 \quad \text{اگر} \quad , \quad dx = -6 \sin q \, dq \quad (\text{حل})$$

$$q = 0 \quad \text{انگاه} \quad x = 6 \quad \text{اگر}$$

$$\Rightarrow I = \int 6 \cos q \cdot 2 \sin q \cdot (-6 \sin q) \, dq = 72 \int \sin^2 q \cdot \cos q \, dq = \left. \frac{72}{3} \sin^3 q \right|_0^p = 24 \left(\sin^3 \frac{p}{6} - 0 \right) = \frac{24}{8} = 3$$

فصل هفتم

توا بع غير

جبرى

7_27 تمرین صفحه 387

مشابه آنچه در تعریف \sin^{-1} بیان شد، تابع \cos^{-1} را تعریف و سپس ثابت کنید

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

حل) تابع $y = \cos x$ روی $[0, p]$ نزولی است پس وارونه پذیر است

$$\cos x : [0, p] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [0, p]$$

برای محاسبه مشتق داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7_25 تمرین صفحه 394.

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$ ، $0 \leq x \leq 1$
در مورد $-1 \leq x \leq 0$ ثابت کنید هرگاه 1

تساوی بالا چگونه بیان می شود؟

(حل)

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y = \cos(\frac{p}{2} - y) \Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{p}{2} - y$$

$$\Rightarrow y + \cos^{-1} x = \frac{p}{2} \Rightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$$

این تساوی برای هر $-1 \leq x \leq 1$ برقرار است.

$$y = \sin^{-1} \frac{1}{2} \quad 2$$

مفروض است، مطلوب است:

Cscy , secy , coty , tany , cosy

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$y = \frac{p}{6} \quad \text{حل) توجه کنید}$$

$$\cos y = \cos \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan y = \tan \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \cot \frac{p}{6} = \sqrt{3}, \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc y = \frac{1}{\sin y} = 2$$

(3) در تمرین های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

(الف)

$$\begin{aligned} \tg(\sec^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) + \csc^{-1}\left(-\frac{13}{12}\right)) &= \tg(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)) = \frac{\sin(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) - \sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)}{\cos(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) - \sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)} \\ &= \frac{\sin(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) \cos(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) - \cos(\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)) \sin(\sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right))}{\cos(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) - \cos(\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)) + \sin(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)) \sin(\sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right))} \\ &= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13}} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{60}{169}}{\frac{15}{65} - \frac{48}{65}} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \sin(\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)) &= \sin(p - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) - 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) = \sin(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) \\ &= \sin(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)) \cos(2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) + \cos(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)) \sin(2\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \times (2(\sqrt{1 - \frac{1}{9}})^2 + 1) + \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times (\frac{16}{9} + 1) + \frac{4}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} \cos(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \sin^{-1}(-\frac{1}{4})) &= \cos(-\frac{p}{6} - \sin^{-1}(\frac{1}{4})) = \cos \frac{p}{6} \cos(\sin^{-1}(\frac{1}{4})) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{8} \end{aligned}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

(الف)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \sin^{-1}(x^2) \\ f'(x) &= 2x \sin^{-1}(x^2) + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^{-1}(\cos x) \\ f'(x) &= \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -1 \end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \cos^{-1} x^2 + \sin^{-1} \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos^{-1} x^2 + \frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(ز)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$f(x) = 3 \sec^{-1} \frac{2}{x} + \csc^{-1} 2x$$

$$f(x) = 3 \cos^{-1} \frac{x}{2} + \sin^{-1} \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

(هـ)

$$f(x) = x(\sec^{-1} 2x)^2 \Rightarrow f(x) = x(\cos^{-1} \frac{1}{2x})^2$$

$$f'(x) = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 - 2x(\frac{-1}{2x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}}} = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 + \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

(وـ)

$$f(x) = \csc^{-1} \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}^2$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 1}}} = -\frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

(تساوي های زیر را تحقیق کنید.)

$$A = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

$$\left| \sin^{-1} x + \sin^{-1} y \right| \leq \frac{p}{2}$$

که در آن

(حل)

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(\sin^{-1} y) = \sin(\sin^{-1} x) \cos(\sin^{-1} y) + \sin(\sin^{-1} y) \cos(\sin^{-1} x) \\ &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \Rightarrow A = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1} y = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+y}{1-xy} \quad (\text{ب})$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} y)} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1} y + \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+y}{1-xy}.$$

(٦) مقادير زیر را با توجه به تمرین ٥ تعیین کنید.

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} - \sin^{-1} \frac{3}{5} \quad \text{الف}$$

(حل)

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \left(-\frac{3}{5} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{4}{5} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} - \frac{3}{5} \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{7}{25} \right)$$

$$A = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{4} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{9} \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$A = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{9} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{7}{11} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{9} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{7}{11} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{14}{99}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{85}{85} = \frac{p}{4}$$

(٧) نشان دهید:

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\operatorname{tg}^{-1}x + \operatorname{tg}^{-1}\frac{1-x}{x} = \begin{cases} \frac{p}{4} & x > -1 \\ -\frac{3p}{4} & x < -1 \end{cases}$$

(حل) طبق؟؟

$$A = \cot^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right) \quad \text{عبارة (8)} \quad \text{را ساده کنید.}$$

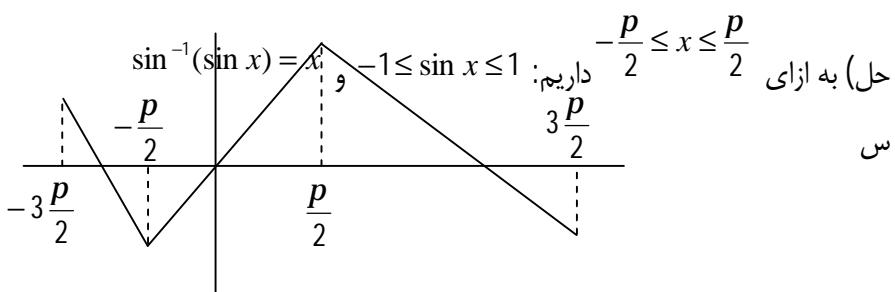
(حل)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right) \Rightarrow A = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right)}\right) = \cot^{-1}\left(\cot\left(x - \frac{p}{4}\right)\right) = x - \frac{p}{4}$$

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin x) \quad (9) \quad \text{تابع را رسم و نشان دهید دوره تناوب آن}$$

است.

طبق شکل دو فاصله های به طول $2p$ منحنی تکرار می شود.

(10) انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int_{-\frac{3}{7}}^{\bullet} \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}} = \frac{1}{7} \sin^{-1}\left(\frac{7x}{6}\right) \Big|_{-\frac{3}{7}}^{\bullet} = -\frac{1}{7} \sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{7} \times \frac{p}{6}$$

$$2) \int_{\frac{3}{3}}^{10} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 25}} = \frac{1}{3} \sec^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) \Big|_{\frac{3}{3}}^{\frac{10}{5\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} \sec^{-1}(2) - \frac{1}{3} \sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{p}{9} - \frac{p}{12} = \frac{p}{36}$$

$$3) \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2 - 1}} = 3 \sec^{-1}(x+2) + c$$

$$4) \int \frac{\sec^2 dx}{9 + \tan^2 x} = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right) + c$$

$$5) \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1}(x) \Big|_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{p}{6} - \frac{p}{4}$$

(11) فرض کنید $x > -1$ ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \tan^{-1}x - \frac{p}{4}$$

حل) طبق فرمول تمرین 6 داریم:

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^{-1} x - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{1+x^2}{1+x}}{\frac{1+x^2}{1+x}} = \operatorname{tg}^{-1} 1 = \frac{p}{4} \end{aligned}$$

(12) نشان دهید که هر گاه آنگاه:

$$\sin^{-1} x = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sin^{-1} x) &= \frac{\sin(\sin^{-1} x)}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \sin^{-1} x &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad (\text{حل}) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad (\text{نشان دهید که})$$

$$\operatorname{tg}(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)) = \frac{\sin(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right))}{\cos(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right))}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

تمرین صفحه 404

۱- انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است:

$$f(-x) \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

۲. مشتق چهارم $f(x) = x^2 \ln x$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

۳. مشتق پنجم $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{1-x \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24}{x^5} - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{x^6} + \frac{24}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

(حل)

۴. با به کار گیری قضیه مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر $a < b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

حل) تابع $f(x) = \ln x$ روی بازه $[a, b]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < b$$

چون $a < c < b$ پس $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

نیز داشته باشیم $x > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$$

حل) تابع $f(t) = \ln(1+t) - t$ روی فاصله $[0, x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

پس:

$$0 < c < x, \quad f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \frac{1}{1+c} - 1 = \frac{-c}{1+c}$$

$$-\frac{x}{1+x} < \frac{-c}{1+c} < 0 \quad \text{پس } 0 < c < x \quad \text{چون}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{آنگاه } x < 1 \quad \text{اگر}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{آنگاه } x > 1 \quad \text{اگر}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{\ln(1+x) - x}{x} < 0 \quad \text{پس}$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x \quad \text{لذا:}$$

۶. انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$1) I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x \ln x} \\ \Rightarrow I &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \ln(\ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^p \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx &= \ln(2 + \sin x) \Big|_0^p + \ln(2 + \sin x) \Big|_0^p \\ &= \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}} \sqrt{x}} \quad u &= 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2 \int_3^5 \frac{du}{u} = 2 \ln u \Big|_3^5 = 2 \ln \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int_{-3}^0 \frac{dy}{y^2 + 3y - 4} &= \int_{-3}^0 \frac{dy}{(y+4)(y-1)} = \frac{1}{5} \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+4} \right) du \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y-1}{y+4} \right| \Big|_{-3}^0 = \frac{1}{5} (\ln \frac{1}{4} - \ln 4) \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

٧. انتگرال های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

$$1) \int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x} dx \quad u = 5 + x\ln x \Rightarrow du = (1+\ln x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln(5+x\ln x) + c$$

$$2) J = \int \frac{4\ln^3 x + 3}{x(\ln^4 x + 3\ln x)} dx$$

$$u = \ln^4 x + 3\ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}(4\ln^3 x + 3)dx$$

$$\Rightarrow J = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln^4 x + 3\ln x) + c$$

$$3) \int \frac{2x^3}{x^2 - 4} dx$$

$$u = x^2 - 4 \Rightarrow du = 2xdx, \quad x^2 = u + 4$$

$$I = \int \frac{(u+4)}{u} du = \int \left(1 + \frac{4}{u}\right) du = u + 4\ln u + c$$

$$(x^2 - 4) + 4\ln(x^2 - 4) + c$$

٨. ثابت کنید به ازای هر $x > 0$ داریم:

$$x - 1 - \ln x > 0, \quad 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

حل) اگر قرار دهیم: $g(x) = x - 1, \quad f(x) = \ln x$

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = f(1) = 0 \\ g'(x) = 1 > \frac{1}{x} = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$x < 1 \quad g'(x) = 1 < \frac{1}{x} = f'(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

در نتیجه

فصل هفتم : توابع غیر جبری

حال اگر به جای $\frac{1}{x}$ ، x قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} &< \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -\ln x < \frac{1}{x} - 1 \\ &\Rightarrow 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

و از آنجا نتیجه بگیرید: که

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

$1 - \frac{1}{x} < \ln x$ نامساوی اول داریم و از نامساوی دوم داریم:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{پس:}$$

9. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (بدون استفاده از قاعده هوپیتال)

حل) طبق مسئله قبل اگر به جای x ، قرار دهیم $1+x$ ، داریم:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \quad \text{پس}$$

چون داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$ ، طبق قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \mathbf{0}$$

(بدون استفاده از هوپیتال) ۱۰. ثابت کنید

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

حل) طبق تمرین ۸ داریم:

$$\frac{x-1}{x^2} < \frac{\ln x}{x} < \frac{x-1}{x}$$

دو طرف را بر x تقسیم می کنیم. از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \mathbf{0}$$

طبق قضیه فشردگی داریم:

فصل هشتم

روشهای
انتگرال‌گیری

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

تمرین صفحه ۴۳۶.

انتگرال $\int x^n \ln x \, dx$ را حل کنید.

حل) اگر فرض کنیم. $dv = x^n dx, u = \ln x$ داریم.

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \quad \text{پس}$$

تمرین صفحه ۴۳۶.

یک فرمول بازگشتی برای $I_n = \int \cos^n x dx$ پیدا کنید و به کمک آن $\int \cos^4 x dx$ را حسابه کنید.

حل) $I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx$ می نویسیم.

اگر فرض کنیم $dv = \cos x dx, u = \cos^{n-1} x$ داریم

$V = \sin x$ و $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx$ در نتیجه:

$$I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow n I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$n=2 \rightarrow 2 I_2 = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$n=4 \rightarrow 4 I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 I_2$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{4} (\sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{2} (\sin x \cdot \cos x + x))$$

تمرین صفحه ۴۳۹.

فصل هفتم : توابع غیر جبری

(۱) هر یک از انتگرال های زیر را حسابه کنید.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

٤

$$1) \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = f(x).e^x + c$$

$$2) \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

$$3) \int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - \int \frac{x}{a^2 + x^2} dx \\ \Rightarrow x \ln(a^2 + x^2) - \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$4) \int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int u e^u du = -\frac{1}{2} (-x^2 - 1) e^{-x^2} + c$$

$$5) \int x^5 e^x dx = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) e^x$$

$$6) I = \int \sin(\ln x) dx$$

$$u = \sin(\ln x), dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\ln x), v = x$$

$$I = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$u = \cos(\ln x), dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x), v = x$$

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

$$I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$$

$$7) I = \int x \operatorname{tg}^{-1} x dx$$

$$u = \operatorname{tg}^{-1} x, dv = x dx \Rightarrow dv = \frac{1}{1+x^2} dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} x + c$$

$$8) \int \sin^{-1} \sqrt{x} dx \quad t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$$

$$I = 2 \int t \sin^{-1} t dt = t^2 \sin^{-1} t - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \int \frac{1-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \sin^{-1} t + \int \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \int \cos^2 q dq = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cos 2q$$

$$\Rightarrow I = x \sin^{-1} \sqrt{x} + \sin^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2(\cos^{-1} \sqrt{x})$$

فصل هفتم : توابع غير جبرى

$$9) \quad I = \int (x^3 + x) chx \, dx \\ I = (x^3 + x) shx - (3x^2 + 1) chx + 6x shx - 6chx$$

$$10) \quad I = \int Ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx \\ u = Ln(x + \sqrt{1+x^2}), dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, v = x \\ I = x Ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x Ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c$$

$$11) \quad I = \int x Ln(\frac{1+x}{1-x}) \, dx \\ u = Ln(\frac{1+x}{1-x}), dv = dx \Rightarrow du = \frac{2}{1-x^2} dx, v = x \\ I = x Ln(\frac{1+x}{1-x}) - \int \frac{2x}{1-x^2} dx = x Ln(\frac{1+x}{1-x}) + Ln(1-x^2) + c$$

$$12) \quad I = \int x^2 Ln(\frac{1+x}{1-x}) \, dx \\ u = Ln(\frac{1-x}{1+x}), dv = x^2 dx \Rightarrow du = -\frac{2}{1-x^2} dx, v = \frac{x^3}{3} \\ I = \frac{x^3}{3} Ln(\frac{1-x}{1+x}) + \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1-x^2}{1+x} dx \\ = \frac{x^3}{3} Lx(\frac{1-x}{1+x}) - \frac{1}{3} \int (x + \frac{x}{x^2-1}) dx \\ = \frac{x^3}{3} Lx(\frac{1-x}{1+x}) - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{6} Ln(x^2-1) + c$$

$$13) \quad I = \int e^{\sqrt{x}} \, dx \\ u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx \\ I = 2 \int u e^u \, du = 2(u-1)e^u + c = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + c$$

$$14) \quad I = \int \frac{tg^{-1} e^x}{e^x} \, dx \\ u = tg^{-1} e^x, dv = \frac{dx}{e^x} \Rightarrow du = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, v = -\frac{1}{e^x} \\ I = -\frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + \int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + \int \frac{du}{u(1+u^2)} \\ = -\frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + Ln|e^x| + \frac{1}{2} Ln(1+e^{2x}) - 2tg^{-1} e^x + c$$

$$15) \quad I = \int (\sin^{-1} x)^2 dx$$

$$u = (\sin^{-1} x)^2, dv = dx \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1} x dx, v = x$$

$$I = x(\sin^{-1} x)^2 - \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1} x dx$$

$$= x(\sin^{-1} x)^2 + 2(\sqrt{1-x^2}) \sin^{-1} x - 2x + c$$

$$16) \quad I = \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

$$u = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2, dv = dx \Rightarrow du = 2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx, v = x$$

$$I = x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2 \int \frac{\ln x - (\ln x)^2}{x^2} x^2 dx$$

$$= x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx + 2 \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

$$-I = x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + 2 \int \frac{1-\ln x-1}{x^2} x^2 dx$$

$$I = -x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2 \left(\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx - \int \frac{1}{x^2} dx \right) + c$$

$$= -x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{1}{x} + c$$

$$17) \quad I = \int \frac{\ln(1+x)}{2(1+x)} dx = \frac{1}{2} \int u du$$

$$= \frac{1}{4} (\ln(1+x))^2 + c$$

$$18) \quad I = \int_{\mathbf{0}}^{p^2} \cos \sqrt{2x} dx$$

$$u = \sqrt{2x} \Rightarrow 2udu = 2dx$$

$$I = \int_{\mathbf{0}}^p u \cos u du = u \sin u + \cos u + c$$

$$19) \quad I = \int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{x} dx, \quad u = \sqrt{x}$$

$$2u du = dx$$

$$I = 2 \int_1^2 u \sec^{-1} u du = 2 \int_1^2 u \cos^{-1} \left(\frac{1}{u}\right) du$$

$$t = \cos^{-1} \left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow dt = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} du = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۸

$$I = 2\left(\frac{u^2}{2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right) - \int \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$= u^2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) - \sqrt{u^2 - 1} \Big|_1^2 = 4 \times \frac{p}{3} - \sqrt{3}$$

20) $I = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x \cdot \cot x \cdot \csc x dx = - \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x (\csc x)' dx$

$$u = x, \quad dv = (\csc x)' dx \Rightarrow du = dx, \quad v = \csc x$$

$$I = x \csc x \Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} - \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} \csc x dx$$

$$\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right|$$

$$I = \left(\frac{3p}{4} \times \sqrt{2} - \frac{p}{4} \times \sqrt{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right| \right)$$

21) $I = \int_{\mathbf{0}}^{\frac{p^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx \quad u^2 = x \Rightarrow 2u du = dx$

$$I = 2 \int_{\mathbf{0}}^{\frac{p}{2}} u \sin u du = 2(-u \cos u + \sin u) \Big|_{\mathbf{0}}^{\frac{p}{2}}$$

تیرین صفحه ۴۴۴.

هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید.

فصل هفتم : توابع غير جبرى

$$1) \quad \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx$$

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\Rightarrow (Ax + B)(x^4 + 2x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 1) + Ex + F$$

$$= x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad , \quad B = -1 \quad , \quad 2A + C = 4 \Rightarrow C = 2$$

$$2B$$

$$2) \quad \int \frac{(\sec^2 x + 1) \cdot \sec^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx , \quad u^2 = \sec^2 x - 1$$

$$I = \int \frac{(u^2 + 2)du}{1 + u^3}$$

$$\frac{u^2 + 2}{1 + u^3} = \frac{A}{1 + u} + \frac{Bu + C}{1 + u + u^2}$$

$$\Rightarrow (A + B)u^2 + (A + B + C)u + A + C = u^2 + 2$$

$$A + B = 1$$

$$A + B + C = 0 \Rightarrow C = -1 , \quad A = 3 , \quad B = -2$$

$$A + C = 2$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{3}{u+1} du - \int \frac{2u+1}{u^2+u+1} du = 3 \ln(u+1) - \ln(u^2+u+1) + c$$

$$I = 3 \ln(\tan x + 1) - \ln(\tan^2 x + \tan x + 1) + c$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned}
 3) \quad I &= \int \frac{x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1} dx \\
 &\frac{x^2 + 2x - 1}{(3x-1)(9x^2 + 3x + 1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{9x^2 + 3x + 1} \\
 &\Rightarrow (9A + 3B)x^2 + (3A - B + 3C)x + A = x^2 + 2x - 1 \\
 &\Rightarrow 9A + 3B = 1, \quad 3A - B + 3C = 2, \quad A - C = -1 \\
 &A = C - 1, \quad 9C - 9 + 3B = 1 \\
 &3C - 3 - B + 3C = 2 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 9C + 3B = 10 \\ 6C - B = 5 \end{cases} \Rightarrow 27C = 25 \Rightarrow C = \frac{25}{27} \\
 &A = \frac{-2}{27}, \quad B = \frac{75}{9} - \frac{45}{9} = \frac{10}{3} \\
 &\Rightarrow -\frac{2}{27} \int \frac{dx}{3x-1} = -\frac{2}{81} \ln(3x-1) \\
 &\frac{\frac{10}{3}x - \frac{25}{27}}{9x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{27} \cdot \frac{90x - 25}{9x^2 + 3x + 1} \\
 &I = -\frac{2}{81} \ln(3x-1) + \frac{1}{27} \int \frac{90x - 25}{9x^2 + 3x + 1} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad I &= \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)} \\
 &\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\
 &A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1 \\
 &I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\right)
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \int \frac{dq}{\cos q(1+\sin q)}$$

$$u = \sin q \Rightarrow \frac{du}{\cos q} = dq$$

$$I = \int \frac{du}{(1-u)^2(1+u)} = \int \frac{du}{(1+u)^2(1-u)}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2(1-u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u}$$

$$C = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad A = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1+u)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u-1}$$

$$I = \frac{1}{4} \ln(1+\sin q) - \frac{1}{2(1+\sin q)} - \frac{1}{4} \ln(\sin q - 1) + C$$

$$6) \quad \int \frac{dq}{\sin(1+\sin q)} = \int \frac{dq}{\sin q} - \int \frac{dq}{1+\sin q}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin q - 1}{\sin q + 1} \right| - \int \frac{1-\sin q}{\cos^2 q} dq$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin q - 1}{\sin q + 1} \right| - \tan q = \frac{1}{\cos q} + C$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$7) \quad \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}$$

$$A(t^2+1)^2 + (Bt+C)(t^2+1) + Dt+E = 1$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}$$

$$A + C + E = 1 \Rightarrow C + E = \frac{3}{4}$$

$$8) \quad \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$$

$$\frac{x^2+1}{x^3+8} = \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2 + (2A+2B+2C)x + 4A+2C = x^2+1$$

$$A+B=1$$

$$\Rightarrow C=-1, \quad A=\frac{3}{4}, \quad B=\frac{1}{4}$$

$$A+B+C=0$$

$$4A+2C=1$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4} \int \frac{3x+1}{x^2+2x+4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x+2) + \frac{1}{4} \int \frac{2x+2+(x-1)}{x^2+2x+4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln(x+2) + \frac{1}{4} \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{4} \int \frac{(x-1)}{x^2+2x+4} dx$$

$$\int \frac{(x-1)}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln((x+1)^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

۱۳

فصل هفتم : توابع غیر جبری

$$9) \quad \int \frac{dx}{x^4 - 3x^3} = \int \frac{dx}{x^3(x-3)}$$

$$\frac{dx}{x^3(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-3}$$

$$C = -\frac{1}{3}, \quad D = 1, \quad A = -1, \quad B = \frac{4}{3}$$

$$I = -\ln|x| - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^2} + \ln(x-3) + C$$

$$10) \quad \int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} = \int \frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$A = 2, \quad B = -4, \quad \dots$$

$$11) \quad \int \frac{xdx}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} = \frac{Cx + D}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$A = 1, \quad B + D = 0, \quad C = 0$$

$$3B + D = 2 \Rightarrow B = 1, \quad D = -1$$

$$12) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

$$13) \quad \int_0^4 \frac{x^2 dx}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}$$

$$14) \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$$

تمرین صفحه ۴۴۹

هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1}(2x) + C$$

$$2) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$x = 3 \sin q \Rightarrow dx = 3 \cos q dq$$

$$I = \int \frac{9 \sin^2 q \cdot 3 \cos q dq}{3 \cos q} = \frac{9}{2} q - \frac{9}{4} \sin 2q$$

$$3) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = 27 \int \sin^3 q dq = 27 \int \sin q - \cos^2 q \sin q$$

$$= -27 \cos q + 9 \cos^3 q + C$$

$$4) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dq}{\sin q} = -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sin q + 1}{\sin q - 1} \right| + 2$$

$$5) \quad \int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$x = 3 \sin q \Rightarrow I = 81 \int \sin^2 q \cdot \cos^2 q dq$$

$$I = \frac{81}{4} \int \sin^2 2q dq = \frac{81}{8} q - \frac{81}{32} \sin 4q + C$$

$$6) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int (\sin q + 1) dq = -\cos q + q$$

$$7) \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx \quad x = 3 \operatorname{tg} q \Rightarrow dx = 3 \sec^2 q dq$$

$$I = 27 \int \operatorname{tg}^3 q dq = 27 \int \operatorname{tg} q (\sec^2 q - 1) dq$$

$$= \frac{27}{2} \operatorname{tg}^2 q + 27 \ln(\cos q) + C$$

$$8) \quad I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\cos^2 q}{\sin^2 q} dq = -\cot q - q + C$$

$$9) \quad I = \int_{-\ln 2}^0 e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

$$u = e^x \Rightarrow I = \int_{\frac{-1}{2}}^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \cos^2 q dq$$

$$= \left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\sin 2q \right) \Big|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{4} - \left(\frac{p}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$10) \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

$$\int \frac{\sec^2 q}{\sec^4 q} dq = \int \cos^2 q dq = \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\sin 2q + C$$

$$11) \quad \int \frac{dx}{(1+2x^2)^{\frac{5}{2}}} , \quad \sqrt{2}x = \operatorname{tg} q$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec^2 q}{\sec^5 q} dq = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos^3 q dq$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\cos q - \sin^2 q \cos q) dq = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin q - \frac{\sin^3 q}{3\sqrt{2}} + C$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$12) \quad \int \frac{dq}{2 + \sin q} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C$$

$$13) \quad \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{1 + \sin q + \cos q} = \int_{\mathbf{0}}^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_{\mathbf{0}}^1 \frac{2dt}{2+2t}$$

$$= \ln(1+t) \Big|_{\mathbf{0}}^1 = \ln 2$$

$$14) \quad \int \frac{dq}{3 + 2\cos q} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{5}} \right) + C$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \int \sec^3 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} \\
 & u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \\
 & \frac{1}{(1-u^2)(1+u^2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2} \\
 & D = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad A+C=0, \quad A-C=-\frac{1}{2} \\
 & A = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4} \\
 & I = -\frac{1}{4} \ln |\sin x + 1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{4} \ln |\sin x - 1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin x - 1}
 \end{aligned}$$

$$16) \quad \int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad I &= \int x \sin^{-1} x dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \sin^2 q dq \\
 &= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{4} (\sin^{-1} x) + \frac{1}{8} \sin 2(\sin^{-1} x) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad & \int \frac{dx}{1-\sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1-t} \\
 & = -\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C
 \end{aligned}$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$19) \int_0^p \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx = - \int_1^{-1} \frac{du}{4 + u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} u \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} = \frac{p}{4}$$

$$20) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec q \cdot \operatorname{tg} q}{\sec^4 q \cdot \operatorname{tg} q} dq = \int \cos^3 q dq \\ = \int (1 - \sin^2 q) \cos q dq = \sin q - \frac{\sin^3 q}{3} + C$$

$$21) \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + C$$

$$22) \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 13} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2 + 4} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2x+3}{2} \right)$$

فصل نهم

مختصات قطبی و
منحنی‌های قطبی

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

تمرین صفحه 456

۱. برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان

نقطه را پیدا کنید که در یکی $r > 0$ و دیگری $r < 0$ باشد.

(الف) $(\sqrt{2}, -\frac{p}{4}) : (-, \frac{3p}{4}), (\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

(ب) $(-2, \frac{4p}{3}) : (2, \frac{7p}{3}), (-2, \frac{10p}{3})$

(ج) $(-3, -p) : (3, 0), (-3, p)$

۲- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط $0 < r < 2p$ و $0 \leq q \leq 2p$ تعیین

کنید

(الف) $(2, 2) : (2\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

(ب) $(-1, -\sqrt{3}) : (2, \frac{4p}{3})$

(ج) $(1, \sqrt{3}) : (2, \frac{p}{3})$

۳- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

(الف) $x^3 = 4y^2 : r^3 \cos^3 q = 4r^2 \sin^2 q \Rightarrow r = \frac{4 \sin^2 q}{\cos^3 q}$

(ب) $xy = 1 : r^2 \sin q \cos q = 1$

۳

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x \\ \text{ج) } &\Rightarrow r^2 = 4r \cos q \\ &\Rightarrow r = 4 \cos q \end{aligned}$$

- معادلات دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} r &= 2 \sin 3q = 2(3 \sin q \cos^2 q - \sin^3 q) \\ r^4 &= 6r \sin q (r \cos q)^2 - 2(r \sin q)^3 \\ (x^2 + y^2)^2 &= 6yx^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } &r = \frac{4}{3 - 2 \cos q} \Rightarrow 3r - 2 \cos q = 4 \\ 3\sqrt{x^2 + y^2} - 2x &= 4 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = (2x + 4)^2 \\ 3x^2 + 3y^2 &= 4x^2 + 16x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } &r^2 = q \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + x^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &\Rightarrow y = x \tan(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

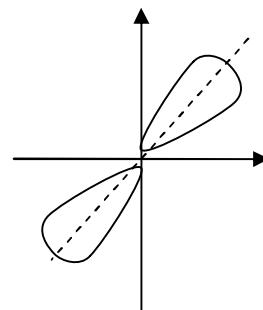
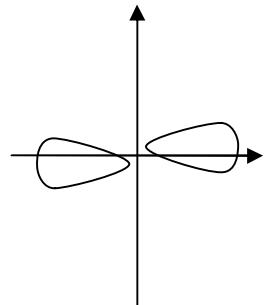
تمرین صفحه 462

1. نمودار هر یک از توابع زیر رارسم کنید.

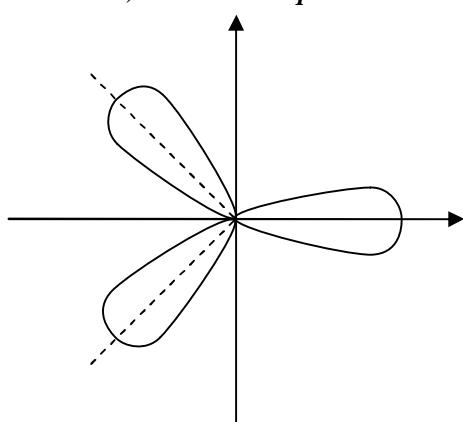
$$1) \quad r^2 = 9 \sin 2q \quad 2) \quad r^2 = 16 \cos 2q$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

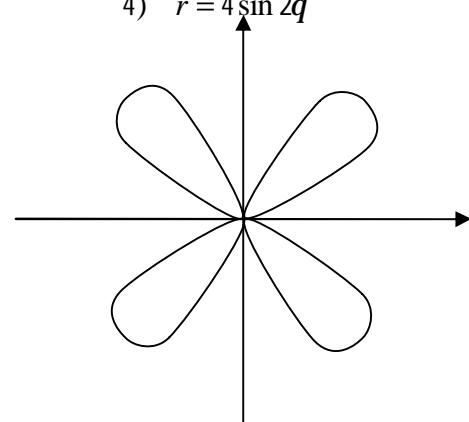
٤



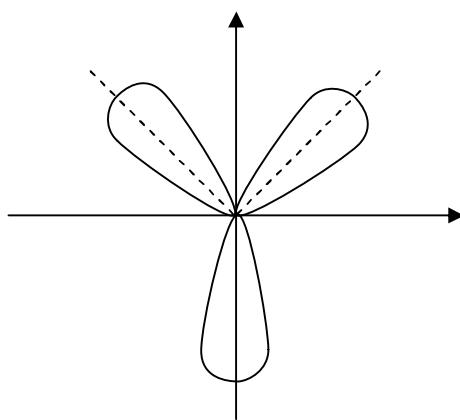
3) $r = 3\cos 3q$



4) $r = 4\sin 2q$



5) $r = 3\sin 3q$



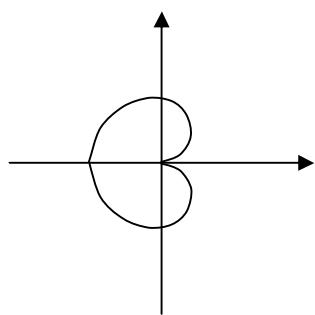
6) $r = 1 + 2\sin q$

$$r = 2\left(\frac{1}{2} + \sin q\right)$$

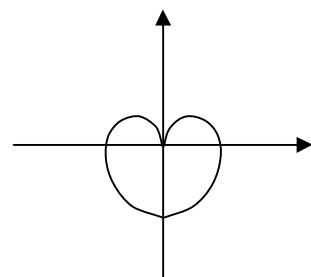
۵

فصل دوم : حد و پیوستگی

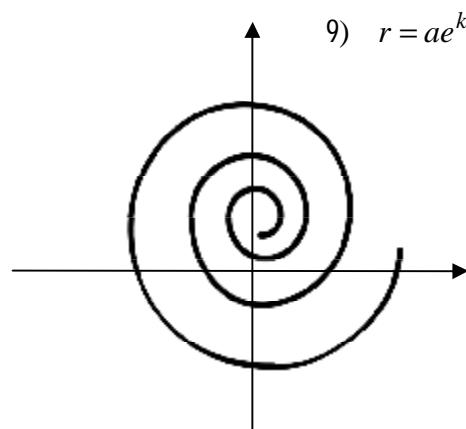
$$7) \ r = 4(1 - \cos q)$$



$$8) \ r = 3(1 - \sin q)$$



$$9) \ r = ae^{kq}$$



٦ حل المسائل رياضي عمومي (١)

٢. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط $dx + by - c = 0$ عمود باشد.

مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعین کنید.

$$y = x - \frac{d}{b}x + \frac{c}{b}$$

خط مورد نظر به صورت $y = \frac{d}{b}x$ است. که در مختصات قطبی به

صورت $q = \tan^{-1}\left(\frac{d}{b}\right)$ مطرح می شود.

$$r \sin q = -\frac{d}{b}r \cos q + \frac{c}{b}$$

$$r = \frac{c}{b \sin q + d \cos q} = \frac{c}{b \sin(\tan^{-1}\left(\frac{b}{d}\right)) + d \cos(\tan^{-1}\left(\frac{b}{d}\right))}$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{b^2 + d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{b^2 + d^2}}$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{b^2 + d^2}}$$

. مسأله ٢ را در مورد خط $\sqrt{3}x + y = 6$ حل کنید.

$$q = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{p}{6}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

۷

فصل دوم : حد و پیوستگی

۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$r = 2\sin q \quad (\text{الف})$$

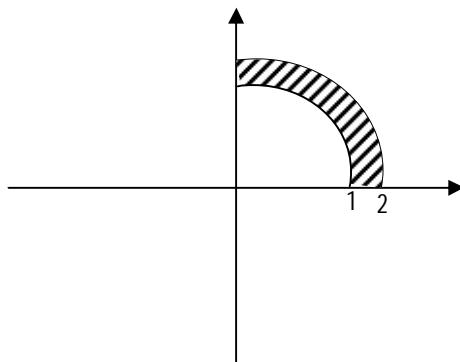
$$\begin{aligned} r = 2\sin q &\Rightarrow r^2 = 2r\sin q \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y \\ &\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$r = 2\sin(q + 45^\circ) \quad (\text{ب})$$

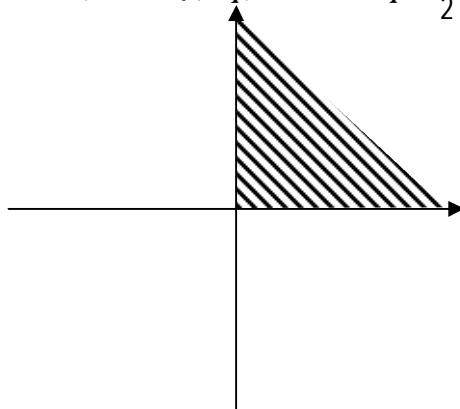
کافی است نمودار قبلی را به اندازه 45° در جهت ساعت دوران دهیم.

۵. ناحیه های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید.

الف) $D = \{(r, q) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}\}$



ب) $R = \{(r, q) | r \geq 0, 0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}\}$



حل المسائل رياضى عمومى (١)

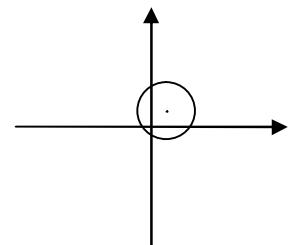
٨

$$\text{c) } P = \{(r, q) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos q, -\frac{p}{2} \leq q \leq \frac{p}{2}\}$$

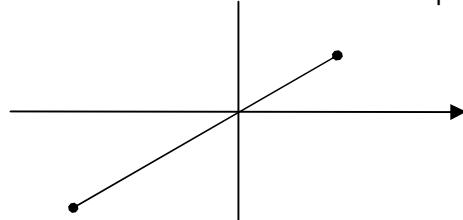
$$0 \leq r \leq 2 \cos q \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \cos q$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$$

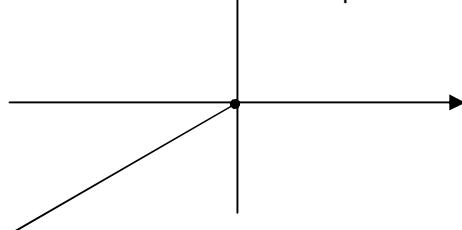
$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$



$$\text{d) } T = \{(r, q) \mid -3 \leq r \leq 2, q = \frac{p}{4}\}$$



$$\textcircled{s) } K = \{(r, q) \mid r \leq 0, q = \frac{p}{4}\}$$



تمرین صفحه 446

1. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید.

$$r = 1 - \sin q, r = \cos(2q) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} q = \frac{p}{4} &\Rightarrow r = \cos(2 \times \frac{p}{4}) = \mathbf{0} \\ q = \frac{p}{2} &\Rightarrow r = 1 - \sin \frac{p}{2} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

دو منحنی از قطب می گذرند.

$$\begin{aligned} \cos(2q) = 1 - \sin q &\Rightarrow 1 - 2\sin^2 q = 1 - \sin q \Rightarrow 2\sin^2 q = \sin q \\ \Rightarrow q = \mathbf{0}, p, q &= \frac{p}{6}, \frac{5p}{6} \end{aligned}$$

١٠ حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$r = 2\cos q, r = 2\sin q \quad (\text{ب})$$

$$q = \mathbf{0} \rightarrow r = 2\sin \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$q = \frac{p}{4} \rightarrow r = 2\cos \frac{p}{2} = \mathbf{0} \quad \text{قطب روی دو منحنی است}$$

$$\cos 2q = \sin q = \cos(q - \frac{p}{2}) \Rightarrow 2q = 2Kp \pm (q - \frac{p}{2})$$

$$\Rightarrow q = 2Kp - \frac{p}{2} \Rightarrow q = -\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}$$

$$q = \frac{2kp}{3} + \frac{p}{2} \Rightarrow q = \frac{p}{2}, \frac{2p}{3} + \frac{p}{2}$$

$$r = 1, r^2 = 2\cos q \quad (\text{ج})$$

$r = 1$ از قطب نمی گذرد.

$$1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$-1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}$$

$$r(1 - \sin q) = 3, r = 4(1 + \sin q) \quad (\text{د})$$

$$q = -\frac{p}{2} \Rightarrow r = 4(1 + \sin(-\frac{p}{2})) = \mathbf{0}$$

منحنی دوم از قطب نمی گذرد.

۱۱

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$\frac{3}{1-\sin q} = 4(1+\sin q) \Rightarrow \cos^2 q = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos q = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$q = \pm\frac{p}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{7p}{6}$$

۲. نمودار $r = \sin \frac{3}{2}q$ ، خودش را قطع می کند. نقاط تقاطع را تعیین

کنید.

تمرین صفحه ۴۶۹

۱. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 1 + \sin q$ را در نقطه

$$(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{p}{3})$$

(حل)

$$\frac{dr}{dq} = \cos q, \quad \operatorname{tg} \frac{p}{3} = \sqrt{3}$$

$$m = \operatorname{tg} d = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۲. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی های زیر را در نقاط

مفروض بدست آورید.

$$p(\sqrt{2}, \frac{p}{6}), r^2 = 4\cos 2q \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} \tan b &= \frac{r}{dr/dq} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\sin 2q}{\sqrt{4\cos 2q}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

$$p(3, p), r = 3(1 - \sin q) \quad (\text{ب})$$

$$\tan b = \frac{r}{dr/dq} = \frac{3}{-\cos q} = 1 \Rightarrow b = \frac{p}{4}$$

۳. مطلوب است اندازه زاویه کوچکترین خطهای مماس بر نقطه تقاطع

داده شده در منحنی

$$p(-2, \frac{2p}{3}), r^2 = 4\cos^2 q - 3, r = 4\cos q$$

$$m_1 = \tan d_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{2-2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \mathbf{0}$$

$$m_2 = \operatorname{tg} d_2 = \frac{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) - 2}{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} + 2(\frac{-\sqrt{3}}{3})}$$

$$= \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) - 2}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} =$$

4. دلنمای $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \frac{q}{2}$ مفروض است. ثابت کنید $r = 2(1 - \cos q)$

(حل)

$$\frac{dr}{dq} = 2 \sin q \Rightarrow \operatorname{tg} b = \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{1 - \cos q}{\sin q}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} b = \frac{2 \sin^2 \frac{q}{2}}{2 \cos \frac{q}{2} \sin \frac{q}{2}} = \frac{\sin \frac{q}{2}}{\cos \frac{q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{q}{2}$$

5. ثابت کنید. به ازای هر a, b , خطوط مماس در هر یک از نقاط تقاطع

دلنمای زیر متعامدند.

١٤

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$r = a(1 + \sin q), r = b(1 - \sin q)$$

فصل دهم

کاربردهای
انتگرال

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۴۷۶-۱-۵ تمرین صفحه

۱. سطح محصور به نمودار توابع $x = 2y^2 - y - 2$, $x = y^2$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$y^2 = 2y^2 - y - 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 2$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^2 (y^2 - y - 2) dy \right| = \left| \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y \right) \Big|_{-1}^2 \right| \\ &= \left| \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \left| \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} \right| \\ &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

۲. سطح محصور به نمودار توابع $2y^2 - y + 3 - x = 0$, $x - y = v$ را

محاسبه کنید

(حل)

۱۷

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$\begin{aligned}
 x &= v + y, \quad x = 2y^2 - y + 3 \\
 v + y &= 2y^2 - y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \\
 s &= \left| \int_{-1}^2 (2y^2 - 2y - 4) dy \right| = \left| \left(\frac{2}{3}y^3 - y^2 - 4y \right) \Big|_1^2 \right| \\
 &= \left| \left(\frac{16}{3} - 12 \right) - \left(\frac{-2}{3} - 1 - 4 \right) \right| = |6 - 12 + 5| = 1
 \end{aligned}$$

۳. سطح محصور به نمودار توابع $y = \sin x, y = \cos x$ را در فاصله

$0 \leq x \leq 2p$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 s &= \left| \int_0^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| \\
 &\quad + \left| \int_{\frac{3p}{4}}^{2p} (\sin x - \cos x) dx \right| \\
 s &= 3
 \end{aligned}$$

۴. سطح محصور به نمودار توابع $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$ را محاسبه

کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned}x^2 - 2x = 4 - x^2 &\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 &\Rightarrow x = -1, x = 2 \\ s = \left| \int_{-1}^1 (4 - 2x^2 + 2x) dx \right| &= \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \\ &= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - \frac{16}{3} = \frac{29}{3}\end{aligned}$$

۵. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=0$ و $x=2$, $y=2x$ و $y=2x-x^2$.

$$y=2x, y=2x-x^2 \quad \text{منحنی های}$$

$$s = \left| \int_0^2 (2x - x^2 - 2x) dx \right| = \left| -\frac{x^3}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

۶. سطح محصور به نمودار توابع $x=2y^2$, $x=1-3y^2$ را محاسبه کنید.

(حل)

۱۹

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$2y^2 = 1 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$s = \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy$$

$$= 2(y - y^3 - \frac{2}{3}y^3) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{15\sqrt{5}})$$

۷. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{8}{x^2 + 4}$, $x = 4y$

(حل)

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2 + 4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2 + 4} \right) dx = 2 \int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx - 2 \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= 8 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 - \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = 2p - \frac{4}{3}$$

۸. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2 + y^2 = 3$ و محدود به

سهمی های $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$ می باشد، حساب کنید.

۲۰

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

حل) این مساحت با انتگرال دوگانه در ریاضی ۲ حل می شود.

۹. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط $y = x+1$, $y = \cos x$ و

محور x ها محدود است.

حل) صورت سؤال اشتباه است.

۱۰. مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی $x^2 + y^3 = 8$ و $x^2 = 4$

(حل)

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$s = 2 \int_0^2 \sqrt{x^3 - x^2} dx = 2 \int_0^2 x \sqrt{1-x} dx$$

$$1-x = u^2 \Rightarrow dx = -2udu$$

$$s = -4 \int u^2 (1-u^2) du = -4 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= 8 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15}$$

۱۱. مساحت بین منحنی های $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$ و محور x ها را

تعیین کنید.

(حل)

۲۱

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$16 - x^2 = (x - 4)^2$$

$$16 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$s = \int_0^4 (16 - x^2 - (x - 4)^2) dx = 16x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x - 4)^3}{3} \Big|_0^4$$

$$= (64 - \frac{64}{3}) + \frac{64}{3} = 64$$

12. مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 3$ و محور ها که

بین عرض های نقاط می نیم $y(x)$ واقع است.

(حل)

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x = x(x-1)(4x-2)$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$$

$$y = 3, y = 3, y = \frac{49}{16}$$

13. مساحت محدود به نمودار تابع $y^2 = x - 1, x = 2(y - 1)^2$ را محاسبه

کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$x = 2(x - 1) \Rightarrow X = 2$$

$$(y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0, y = 2$$

$$s = \int_0^2 (1 + (y - 1)^2 - 2(y - 1)^2) dy = \int_0^2 (1 - (y - 1)^2) dy$$

$$= \left(y - \frac{(y - 1)^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

14. سطح محصور به نمودار $y = chx$ و خط $x = 1$ و محور x ها را حساب

کنید

حل) مساحتی وجود ندارد.

15. مساحت های دو ناحیه ای را که سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2 + y^2 = 8$ تقسیم می کند محاسبه کنید.

(حل)

$$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

مساحت نیم دایره بالایی برابر نصف $8p = p(2\sqrt{2})^2$ است یعنی $4p$ است.

16. مراکز دو قرص مستدير به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند

(۱) مساحت ناحیه ای را باید که محدود به دو قرص است.

حل) دایره های $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را در نظر می گیریم خط

$x=1-a$ و تر مشترک دو دایره است. به علت تقارن مساحت بین

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ و خط را محاسبه و دو برابر می کنیم}$$

$$\begin{aligned} x &= 1-a \Rightarrow (1-a-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-a^2} \\ s &= 2 \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} (1-a - (1-\sqrt{1-y^2})) dy \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{1-a^2}} (\sqrt{1-y^2} - a) dy = 4 \left(\int_0^{\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}} \cos^2 q dq - \int_0^{\sqrt{1-a^2}} a dv \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1}(\sqrt{1-a^2}) + \frac{1}{4} \sin 2(\sin^{-1} \sqrt{1-a^2}) - a \sqrt{1-a^2} \right) \end{aligned}$$

(۱۸) اگر $a > 0$ ثابت) انگاه مساحت محصور به دو

منحنی را حساب کنید.

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned} ax = x^3 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a} \\ s = \left| \int_{-\sqrt{a}}^0 (ax - x^3) dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| \\ = 2 \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| = 2 \left| \left(\frac{x^4}{4} - a \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^{\sqrt{a}} \\ = 2 \left| \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) \right| = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

(١٩) مساحت محصور به نمودار $y^2 = 4x + 4y - 12$ و محور مختصات و

خط $x=2$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} y(x^2 + 4) = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{4+x^2} \\ s = \int_0^2 \frac{12}{4+x^2} dx = 6 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 \frac{p}{4} = \frac{3p}{2} \end{aligned}$$

(٢٠) مساحت محصور به نمودار توابع $x = y^3$, $y = x^3$, $x + y = 2$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dy \\ s_2 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dx \\ s_1 = s_2 &= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

۲۵

فصل دوم : حد و پیوستگی

تمرین صفحه 480

مساحت سطح محصور را بیابید.

.1

$$\begin{aligned} -1 \leq t \leq 1 & , \quad c : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \\ g(t) = t^3 - t & \Rightarrow g(-1) = -2, g(1) = 0 \end{aligned}$$

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{-2}^0 (t^3 - t)(2t) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_{-2}^0 \\ &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 180}{15} = \frac{112}{15} \\ 0 \leq t \leq 2 & , \quad c : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^4 + y^2 = x^2$$

شکل کاملاً متقارن است. "

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos t (\cos^3 t - 2\sin^2 t \cos t) dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt - 8 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left(t + \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{p}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{3p}{16}
 \end{aligned}$$

(3) مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را محاسبه کنید.

حل) بیضی را به صورت زیر پارامتری می کنیم:
 $x = a \cos t$
 $y = b \sin t$ $0 \leq t \leq 2p$

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \left| \int_0^{\frac{p}{2}} -b \sin t (a \sin t) dt \right| = \left| -2ab \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| \\
 &= 2ab \times \frac{p}{2} = pab
 \end{aligned}$$

(4) مساحت محدود به $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را محاسبه کنید.

۵. مساحت محدود به یک قوس سیکلولئید زیر را بدست آورید.

$$c: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{p}{2}} a(1-\cos t)^2 dt = a \int_0^{\frac{p}{2}} (1-2\cos t + \cos^2) dt \\ &= \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p}{4} - 2 \end{aligned}$$

تمرین صفحه 483

۱. مساحت ناحیه ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس

واقع است. ($a > 0$) پیدا کنید.

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{4p} (aq^2) dq = \frac{1}{2} \frac{a}{3} q^3 \Big|_0^{4p} = \frac{16}{2} \frac{4}{3} ap^3$$

۲. مطلوب است سطح محدود به $r = \sin 2q$

حل) به علت تقارن کامل داریم:

$$s = \frac{1}{2} \times 4 \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin 2q)^2 dq = \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 4q) dq = \frac{p}{2}$$

۳. مساحت داخل دایره $r = 1 + \cos q$ و خارج دلنمای $r = 3 \cos q$ را بباید

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$3\cos q = 1 + \cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{3}} ((3\cos q)^2 - (1+\cos q)^2) dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{3}} (2\cos^2 q - 2\cos q - 1) dq = (q + \frac{1}{2}\sin 2q - 2\sin q - q) \Big|_0^{\frac{p}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \end{aligned}$$

. $q = 2p$, $q = 0$ و خطوط ۴. مساحت محصور به

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{2p} e^{4q} dq = \frac{1}{8} e^{2p} \Big|_0^{2p} = \frac{1}{8} (e^{4p} - 1)$$

. ۵. مطلوب است مساحت داخل دایره $r = 1 - \cos q$ و خارج دلنمای $r = 1$

حل) دو نمودار همدیگر را در $q = \frac{3p}{2}$, $q = \frac{p}{2}$ قطع می کنند.

به علت تقارن، مساحت در فاصله $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$ را حساب کرده، دو برابر می کنیم.

$$\begin{aligned} s &= 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - (1 - \cos q))^2 dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{2}} (2\cos q - \cos^2 q) dq = (2\sin q - \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}\sin 2q) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2 - \frac{p}{4} \end{aligned}$$

. ۶. مطلوب است مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی $r = \sin 2q$, $r = \cos 2q$

حل) به علت تقارن، مساحت را در ربع اول حساب کرده، چهار برابر می کنیم.

. مساحت ناحیه بین $r = 6 \sin q$ ، $r = 6 \cos q$ را حساب کنید. 7

$$\begin{aligned} S &= \left| 2 \int_0^{\frac{p}{4}} (6 \sin q)^2 \right| \\ &= \left| 6 \int_0^{\frac{p}{4}} (1 - \cos 2q) dq \right| \\ &= \left| 6(q - 2 \sin 2q) \Big|_0^{\frac{p}{4}} \right| \\ &= 6\left(\frac{p}{4} - 2\right) \end{aligned}$$

. مساحت ناحیه داخل $r^2 = a^2 \cos 2q$ را بدست آورید. 8

(حل)

$$S = 4 \int_0^{\frac{p}{4}} a^2 \cos 2q = 4a^2 \sin 2q \Big|_0^{\frac{p}{4}} = 4a^2$$

. مساحت ناحیه $r = 1 + \sin q$ را محاسبه کنید. 9

حل طبق مثال 10-3-3 برابر $\frac{3}{2}p$ است.

. مساحت محدود به درون $r^2 = \sin 2q$ و دایره $r = \sqrt{2} \sin q$ را محاسبه

کنید. 10

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} 2 \sin^2 q - \sin 2q) dq \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} q - \frac{1}{4} \sin 2q + \frac{1}{2} \cos 2q \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{4} - 1 \right) \end{aligned}$$

. ٤٨٩ صفحه تمرین

١. طول منحنی $r = a \sin^3 \frac{q}{3}$ میان $0 \leq q \leq p$ را در فاصله محاسبه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^p \sqrt{(dr)^2 + r^2 (dq)} = \int_0^p \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{q}{3} \cos^2 \frac{q}{3} + a^2 \sin^6 \frac{q}{3}} dq \\ &= \int_0^p a \sin^2 \frac{q}{3} dq = \frac{a}{2} \int_0^p (1 - \cos^2 \frac{q}{3}) dq \\ &= \frac{a}{2} \left(q - \frac{3}{2} \sin \frac{2q}{3} \right) \Big|_0^p = \frac{a}{2} \left(p - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

٢. مطلوب است طول قوس $r = 2a \cos^2 q$ میان $0 \leq q \leq \frac{p}{4}$ بیابید.

(حل)

۳۱

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} &= -2a \sin 2q \\ s &= \int_0^{\frac{p}{4}} \sqrt{4a^2 \sin^2 2q + 4a^2 \cos^2 q} dq = 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{4 \sin^2 q + \cos^2 q} dq \\ &= 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{3 \sin^2 q + 1} dq = 2a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+3u^2} du \\ \sqrt{3}u &= tgt = \int \sqrt{1+3u^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sec^3 q dq \end{aligned}$$

. طول دلوار $r = a(1-\cos q)$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dq} &= a \sin q \Rightarrow \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + r^2 = a^2 \sin^2 q + a^2 \cos^2 q + a^2 \\ s &= 2 \int_0^p \sqrt{2a^2} dq = 2\sqrt{2}ap \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

. طول منحنی های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

$$0 \leq t \leq 2p, \quad y = \sin 2t, \quad x = \cos 2t \quad (\text{الف})$$

(حل)

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} dt = 2p$$

$$0 \leq q \leq 2p, \quad y = a \sin^3 q, \quad x = a \cos^3 q \quad (\text{ب})$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\frac{dx}{dq} = -3a \cos^2 q \sin q, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 q \cos q$$

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} 3a \sin q \cos q dq = 12a \left[\frac{\sin^2 q}{2} \right]_0^{\frac{p}{2}} = 6a$$

۵. طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بین نقاط (۰, ۰) و (۴, ۸) واقع است،

محاسبه کنید.

$$y^2 = x^3 \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9x^4}{4y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x \right) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

۶. طول منحنی $y = \ln|\cos x|$ در فاصله $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$ محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = -\tan x \Rightarrow s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec x dx$$

$$\Rightarrow s = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{p}{4}} = \ln \left| \sqrt{2} + 1 \right|$$

۷. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{2}x^2$ از نقطه (۰, ۰) تا نقطه $B(\frac{1}{2}, 1)$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 y' = x \Rightarrow s &= \int_0^{-1} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec^3 q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \int \sec^2 q \cdot \sec q dq = \tg q \cdot \sec q - \int \tg^2 q \cdot \sec q dq \\
 &= \tg q \cdot \sec q - \int \sec^3 q dq + \int \sec q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \frac{1}{2} \tg q \cdot \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + \tg q| \\
 s &= \left(\frac{1}{2} \tg q \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + \tg q| \right) \Big|_0^{\frac{p}{4}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

8. طول قوس منحنی $y^3 = 8x^2$ از نقطه (2, 1) تا نقطه (18, 27) را به دست

آورید.

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$3y^2y' = 16x \Rightarrow y' = \frac{16x}{3y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{16x} \Rightarrow (\frac{dx}{dy})^2 = \frac{9y^4}{(16)^2 x^2} = \frac{9 \times 8y}{(16)^2}$$

$$1 + (\frac{dx}{dy})^2 = 1 + \frac{9}{32}y$$

$$s = \int_2^{18} \sqrt{1 + \frac{9}{32}y} dy = \frac{2}{3} \times \frac{32}{9} \left(1 + \frac{9}{32}y\right) \Big|_2^{18}$$

$$= \frac{64}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{32} \times 18\right) - \left(1 + \frac{9}{32} \times 2\right) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} \right)$$

. طول قوس منحنی $6xy = y^4 + 3$ را در فاصله $1 \leq y \leq 2$ به دست آورید.

$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$$

$$1 + (\frac{dx}{dy})^2 = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)^2$$

$$s = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right) dy = \left(\frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}$$

١٠. طول قوس قسمتی از منحنی $9y^2 = 4(1+x^2)^3$ که در ربع اول از $x=0$ تا

$x=2\sqrt{2}$ واقع است تعیین کنید.

$$18yy' = 24x(1+x^2)^2 \Rightarrow y' = \frac{4x(1+x^2)^2}{3y}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2(1+x^2)^4}{9y^2} = 4x^2(1+x^2)^2$$

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2(1+x^2)^2} dx$$

11. طول قوس منحنی مقابله را

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) \\ s &= \int_0^4 \sqrt{2e^t dt} = \sqrt{2}e^t \Big|_0^4 = \sqrt{2}(e^4 - 1) \end{aligned} \quad \text{باید: } C: \begin{cases} x = e^t \cos t, & 0 \leq t \leq 4 \\ y = e^t \sin t & \end{cases}$$

(حل)

12. طول قوس منحنی C را به دست آورید:

$$C: \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, & -1 \leq t \leq 1 \\ y = \operatorname{tg} t & \end{cases}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

١٣. طول قوس $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \leq x \leq 3$ محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + x^2(x^2 + 2)$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = 12$$

١٤. طول قوس $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ را در فاصله $2 \leq x \leq 3$ تعیین کنید.

(حل)

$$y = \ln(e^x - 1) \ln(e^x + 1)$$

$$y' = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$s = \int_2^3 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \int_2^3 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \ln(e^x - e^{-x}) \Big|_2^3$$

$$= \ln \frac{e^3 - e^{-3}}{e^2 - e^{-2}}$$

۱۵. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{3}t^2 + t$, $x = \frac{1}{3}(2t+3)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \leq t \leq 3$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2t+3)^{\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}t \\ s &= \int_0^3 \sqrt{2t+3 + \frac{4}{9}t^2} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 \sqrt{(2t+9)^2 - 78} dt \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

۱۶. طول منحنی $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ را در فاصله $1 \leq x \leq 10$ حساب کنید.

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - \frac{1}{16x^3} = \frac{64x^6 - 1}{16x^3} \\ 1 + (y')^2 &= (4x^3 + \frac{1}{16x^3})^2 \\ s &= \int_1^{10} (4x^3 + \frac{1}{16x^3}) dx = x^4 - \frac{1}{32x^2} \Big|_1^{10} \\ &= (10^4 - \frac{1}{32 \cdot 100}) - (1 - \frac{1}{32}) \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۴۹۵ .

۱. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$V = p \int_0^4 (y - 8)^2 dx = p \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 8)^2 dx \\ = p \int_0^4 (x^3 - 16x^{\frac{3}{2}} + 64) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} + 64x \right) \Big|_0^4$$

2. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهی $y^2 = 4x$ و خط $y = x$

حول خط $x = 4$ را بباید.

3. حجم مخروط مستبدیری به شعاع قاعده a و ارتفاع h را تعیین کنید.

(حل)

$$y = \frac{a}{h} x \\ V = p \int_0^h \frac{\frac{a}{h} x}{\frac{a}{h}}^2 dx = \frac{1}{3} pa^2 h$$

5. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین سهی $x = y^2$ و محور

y ها و خط $y = 2$ ، حول خط $y = 1$

(حل)

$$V = \int_0^1 ((2 - \sqrt{x})^2 - (2 - 1)^2) dx \\ = p \int_0^1 (3 - 4\sqrt{x} + x) dx = p \left(3x - \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = p \left(3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

حجم حادث از دوران ناحیه محدود به $x=2y-y^2$ حول محور y ها را

تعین کنید.

$$\begin{aligned} V &= p \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy = p \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) dy \\ &= p \left(\frac{4}{3}y^3 - y^4 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = p \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) \end{aligned}$$

7. ناحیه A محصور به منحنی $x=0$, $y=4$, $y=1$ و $y=x^2$ حول محور x ها دورانه می کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

$$\begin{aligned} V &= 2p \int_{-2}^2 (4^2 - x^4) dx - p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= 2p \int_0^2 (16 - x^4) dx - 2p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= 2p \left(16x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 - 2p \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &\Rightarrow V = 2p \left(32 - \frac{32}{5} \right) - 2p \left(1 - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

8. منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل

چقدر است.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V = p \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2pb^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= 2pb^2 \left(a - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}pb^2 a$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های $y^2 = 8x$, $y = x^2$

حول محور x ها را حساب کنید.

$$x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$V = p \int_0^2 (8x - x^4) dx = p \left(4x^2 - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_0^2$$

$$= p \left(8 - \frac{32}{5}\right)$$

10. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ را حول

محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

(حل)

٤١

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = (a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax$$

$$V = p \int_0^a ((a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax) dx$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{(a+x)^3}{3} - \frac{8}{3}ax\sqrt{ax} - \frac{4}{a^2} \times \frac{2}{5}(ax)^{\frac{5}{2}} + 2ax^2 \right) \Big|_0^a$$

$$= p \left(\frac{8a^3}{3} - \frac{8}{3}a^3 - \frac{8}{5}a^3 + 2a^3 \right) = \frac{8}{15}a^3p$$

11. ناحیه بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور عرض ها و خط

$y = 1$ را حول محور y ها دوران می دهیم حجم حاصل را محاسبه کنید.

$$V = 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = 2p \left(\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x - x \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2p \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)$$

12. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمنی $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ و خط

$5x - 8y + 14 = 0$ حول محور x ها را به دست آورید.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$8y = 2x^2 + 4 \Rightarrow 5x + 14 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{105}}{4}, \quad x = \frac{5 - \sqrt{105}}{2}$$

$$V = p \int_{\frac{5-\sqrt{105}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{105}}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 - \left(\frac{5x+14}{8} \right)^2 dx$$

. ٤٩٨ صفحه تمرین

١. در یک جسم کروی شکل به شعاع ٥ سانتی متر، حفره ای به شعاع ٢ سانتی

متر ایجاد می کنیم محور حفره یک قطر کرده است. حجم قسمت باقیمانده جسم

را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}\pi(125) - \frac{4}{3}\pi(8) = \frac{4}{3}\pi(117)$$

٢. مطلوب است حجم جسم حادث از دوران ناحیه OBC مخصوص به

محور x ها و خطوط $y=8$ ، $y=0$ حول محور x ها .

۴۳

فصل دوم : حد و پیوستگی

$$V = p \int_0^4 (64 - x^3) dx = p \left(64x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^4$$

$$V = p(256 - 64) = 192p$$

۳. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی $y^2 = x^3$

و خط $x=4$ و محور x ها حول خط ac .

$$V = p \int_0^4 ((8 - x^{\frac{3}{2}})^2 - 64) dx$$

$$V = p \int_0^4 ((16 - x^{\frac{3}{2}} + x^3) dx$$

$$V = p \left(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 = \left| p \left(64 - \frac{(32)^2}{5} \right) \right|$$

۴. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی های

$x=-2$ و $y=x^2$ ، $y^2=x$ حول خط

(حل)

$0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq x \leq 1$

$$V = p \int_0^1 (\sqrt{y} + 2)^2 - (y^2 + 2)^2 dy$$

$$V = p \int_0^1 (y + 2\sqrt{y} + 4) - (y^4 + 4y^2 - 4) dy$$

$$V = p \left(\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y \sqrt{y} - \frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$V = p \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} \right) = p \left(\frac{15 + 8 - 6}{30} \right) = \frac{89}{30}$$

٤

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

٥. ناحیه ای که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود و در ربع اول است. حول

محور y ها دوران می کند حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

$$V = 2p \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2p \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$V = 2p \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3}p$$

٦. حجم جسمی را بباید که از دوران ناحیه بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ حول

خط $x = 2$ ایجاد می شود .

(حل)

$$V = p \int_0^4 ((2 - \frac{y}{2})^2 - (2 - \sqrt{y})^2) dy$$

$$V = p \int_0^4 (-2y + \frac{y^2}{4} + 2\sqrt{y} - y) dy$$

$$V = p \left(\frac{y^3}{12} + \frac{4}{3}y\sqrt{y} - \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_0^4 = p \left(\frac{64}{12} + \frac{32}{3} - 24 \right)$$

$$V = \left| p \left(\frac{48}{3} - \frac{72}{3} \right) \right| = 8p$$

٧. یک دیسک به شعاع و به مرکز $(0, b)$ که $b \leq a \leq 0$ حول محور y ها دوران می

کند و یک چنبره تولید می کند حجم جسم آن را تعیین کنید.

(حل)

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - (x-b)^2}$$

$$\begin{aligned} V &= 4p \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx = 4p \int_{-a}^a (x+b) \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 4p \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx + 4p \int_{-a}^a b \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 8p b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8p \times \frac{pa^2}{4} = 2p^2 a^2 b. \end{aligned}$$

8. ناحیه مثلثی $x=b > a$ حول خط $x=a > 0$, $y=0$, $y=x$ دوران می کند و

جسمی پدید می آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

(حل)

$$V = p \int_0^a ((b-y)^2 - (a-y)^2) dy$$

$$V = p \left(\frac{(y-b)^3}{3} - (a-y)^2 y \right) \Big|_0^a = p \left(\frac{(a-b)^3}{3} - a(b-a)^2 \right)$$

فصل یازدهم

صورت‌های مبهم و انتگرال

های ناسره

تمرین صفحه ۵۱۹ .

۱. حد های زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\operatorname{tg}^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1$$

$$2) \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin^2 t}{t-p} = \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin 2t}{1} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos 3x}{p-2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sec^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos 2x}{2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x(2\operatorname{tg}^{-1} x - p) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\operatorname{tg}^{-1} x - p}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

$$6) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t e^{at}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - 1}{t e^{at}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a e^{at}}{e^{at} + a t e^{at}} = a$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sin^2 x \ln x} = e^0 = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin t - \sin 3t}{3\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 3t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos t - 3\cos 3t}{3\sec^2 t - 3\sec^2 3t} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin t + 3\sin 3t}{2\sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t - 6\sec^2 3t \cdot \operatorname{tg} 3t} = -\frac{8}{16}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^3} - 1}{\frac{2}{x^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(e^x) - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln e + \ln x - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{p \cos p x} = \frac{-1}{p}$$

$$11) \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\ln \sin r}{\cos r} = \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cot r}{-\sin r} = \mathbf{0}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = 1$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1 - x}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$14) \lim_{t \rightarrow 0} (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos 2t}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{-2\ln 2t}{2t}} = e^{-2}$$

$$t \rightarrow 0$$

$$\text{مشروط بر اینکه } f \text{ دو بار مشتق}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} . ۱۵$$

پذیر باشد.
حل)

$$\text{حد} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - 2f''(x) + f''(x-h)}{2} = \mathbf{0}$$

$$16) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} \frac{x \frac{1-x^n}{1-x} - n}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} \frac{x(x^n-1) - n(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} \frac{(n+1)x^n - 1 - n}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$17) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x \rightarrow 1^+}} \frac{x^x - x}{1-x + L \bullet g x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x \rightarrow 1^+}} \frac{e^{x \ln x} - x}{1-x - L \bullet g x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x \rightarrow 1^+}} \frac{(1+\ln x) e^{x \ln x} - 1}{-1 + \frac{1}{\ln 1 \bullet} \cdot \frac{1}{x}} = \mathbf{0}$$

$$18) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{\sin^{-1} 2x - 2 \sin^{-1} x}{x^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{\frac{2 \times (-\frac{1}{2})(-8x)}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \times (-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-x^2)^3 2}}{6x}$$

$$= \frac{8-2}{6} = 1$$

$$19) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x}}{a} - b \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x}}{b} \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1+\frac{x}{a^2}}{a^2} - \frac{1+\frac{x}{b^2}}{b^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{x \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$20) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}$$

$$x \rightarrow a \qquad \qquad \qquad x \rightarrow a$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x+a}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2a}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}}$$

$$x \rightarrow a$$

۲. ثابت های a و b را طوری تعیین کنید که :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{\frac{b - \cos x}{b}} = 1 \Rightarrow b = 1, a = 4$$

$$x \rightarrow 0$$

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. تابع f در بازه $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 f(x) dx$ را تعیین کنید.

حل) انتگرال ناسره نوع دوم است و مقدار آن برابر زیر است

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ همگراست، اگر $p > 1$

باشد

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

$$t \rightarrow +\infty \qquad t \rightarrow +\infty$$

اگر $p > 1$ ، توان x در صورت منفی است پس در این حالت

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p}$$

۳. مقداری برای n پیدا کنید که به ازای آن انتگرال

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

به ازای مقدار n بدست آمده انتگرال را حساب کنید.

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(Ln(t+1)^n - \frac{3}{4} Ln(2t^2+n) \right) - A$$

$t \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} Ln \frac{\frac{(t+1)^n}{3}}{(2t^2+n)^{\frac{3}{4}}} - A$$

$t \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow n = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$I = Ln \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - Ln \frac{\sqrt{8}}{\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

۴) نوع انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ را تعیین کنید.

حل) این انتگرال همگراست چون $\frac{1}{(1+x^2)^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$

همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

۵) نوع انتگرال $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x dx$ را تعیین کنید.

$$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} \int_{\frac{p}{4}}^t \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} Ln|\sec t + \tan t| - A$$

$$t \rightarrow \frac{p}{2}^- \quad t \rightarrow \frac{p}{2}^- \\ = +\infty$$

انتگرال و اگر است.

۶. به ازای مقادیر مختلف n نوع انتگرال های زیر را بررسی کنید:

الف) $I = \int_0^1 x^n dx$ برای $n > -1$ همگرا و برای $-1 \leq n \leq -1$ و اگر است.

$$I = \int_0^1 x^n \ln^2 x dx \quad (b)$$

۷. نوع انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \quad \text{و می} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} \quad \text{الف) و اگر است چون} \\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{دانیم و اگر است.} \quad (d)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x \cos x}}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{و اگر است چون} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x \cos x} \quad (b) \\ x \rightarrow 0^+$$

و اگر است، طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال داده شده و اگر است.

$$\frac{1}{x^2 + \ln x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{و همگر است، زیرا داریم:} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln x} \quad (c)$$

انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگر است پس طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگر است.

$$\cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \quad (d)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{پس} \quad x^3 < x^2 \quad \text{داریم} \quad 0 < x < 1 \quad \text{برای}$$

اما انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ همگر است، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگر است.

$$\text{اما انتگرال} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x \sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \quad \text{همگر است، چون} \quad \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx \quad (e) \\ x \rightarrow 0^+$$

$$\text{همگر است، پس انتگرال داده شده همگر است.} \quad \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0}} \frac{\cos x}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{اما انتگرال} \quad \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{و اگر است. چون}$$

واگر است، پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{x}$ و اگر است.

$$8. \text{ فرض کنید } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{4} \quad (b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{p} \quad (\text{الف})$$

(حل)

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p} \quad (\text{الف})$$

ب) از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx &= \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-x^2} dx = \frac{-x}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{4} \end{aligned}$$

۹. تابعی نظیر f طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ و اگر اولی

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-t}^t f(x) dx = \mathbf{0}$$

$$\text{حل) تابع } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

۱۰. ثابت کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^t dx$ به ازای هر t حقیقی همگر است.

$$\text{حل) چون } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^t e^{-x}}{e^{-2x}} = \mathbf{0} \quad \int_1^{+\infty} e^{-2x} dx \quad \text{و انتگرال}$$

انتگرال داده شده همگر است.

۱۱. تابع گاما. $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt$ تابع گاما است. ثابت کنید.

الف) تابع $\Gamma(s)$ به ازای هر $s > 0$ همگر است.
حل) با توجه به تمرین ۱۰ این تابع برای هر s همگر است.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + \Gamma(x)$$

$$\therefore \Gamma(n+1) = n!$$

حل) طبق قسمت ب داریم :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\dots1 = n!$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2} \quad (d)$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{p}}{2} \quad (\text{حل})$$

تساوی اخیر از تمرین ۸ بدست می‌آید.

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

۱۲. نوع انتگرال‌های زیر را معلوم کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} \quad \text{اين انتگرال و اگر است چون} \quad \int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{الف)$$

طبق آزمون مقایسه چون انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ و اگر است، انتگرال بزرگتر و اگر است.

$$\frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{انتگرال همگر است چون} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx \quad (b)$$

همگر است. طبق آزمون مقایسه انتگرال داده و انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ شده همگر است.

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

تمرین صفحه ۵۳۵ .

۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.

(حل)

$$(4+2i)x + (5-3i)y = 13+i$$

$$(4x+5y) + (2x-3y)i = 13+i$$

$$\begin{cases} 4x+5y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Rightarrow \quad y=1 \quad , \quad x=2$$

۲. حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{2\bullet}{4+3i} = \frac{(5+5i)(4+3i) + 2\bullet(3-4i)}{(3-4i)(4+3i)} \\ &= \frac{5+35i+6\bullet-8\bullet i}{24-7i} = \frac{65-45i}{24-7i} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{(1+i)(1+2i)}{1-i} + i = \frac{-1+3i+1+i}{1-i} = \frac{4i}{1-i} = \frac{(4i)(1+i)}{2} = -2+2i$$

$$\text{ج) } \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i-1} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

۳. جواب دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} (1+i)Z_1 - iZ_2 = 2+i \\ (2+i)Z_1 + (2-i)Z_2 = 2i \end{cases}$$

حل) از روش کرامر استفاده می کنیم.

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$Z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+i & -i \\ 2i & 2-i \\ 1+i & -i \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix}}{3i-2} = \frac{5-2}{3+i-1+2i} = \frac{3}{3i-2}$$

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2+i & 2i \end{vmatrix}}{3i-2} = \frac{2i-2-3-4i}{3i-2} = \frac{-5-2i}{3i-2}$$

تمرین صفحه ۵۳۷ .

فرض کنید $a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = \mathbf{0}$ در آن برای ثابت کنید \bar{Z} ریشه معادله فوق است.

(حل)

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0} = \mathbf{0}$$

$$\bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 = \mathbf{0}$$

$$a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = \mathbf{0}$$

پس \bar{Z} ریشه معادله است.
تمرین صفحه ۵۳۸ .

۱. فرض کنید $Z_2 \neq \mathbf{0}$ ، $Z_1, Z_2 \in R$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = (Z_1 Z_2^{-1}) = Z_1 \bar{Z}_2^{-1}$$

$$= \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

٢. عبارات زیر را ساده کنید.

(الف) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-2i+i^2} = \frac{10+15i}{-2i} = -\frac{15}{2} + 5i$$

(ب) $\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}} = \frac{1+i+1}{2-i-1+i} = 2+i$

(ج) $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 3\left(\frac{2i}{-2i}\right) - 2\left(\frac{2i}{-2i}\right)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$
 $= -3 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -3 - i$

٣. درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $Z + \bar{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$

$(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)i) + (\operatorname{Re}(Z) - \operatorname{Im}(Z)i) = 2 \operatorname{Re}(Z)$ حل

$Z - \bar{Z} = 2 \operatorname{Im}(Z)i$ (ب)

$(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)i) - (\operatorname{Re}(Z) - \operatorname{Im}(Z)i) = 2 \operatorname{Im}(Z)i$

٤. با فرض $0 \neq Z = x + yi$ را رسماً

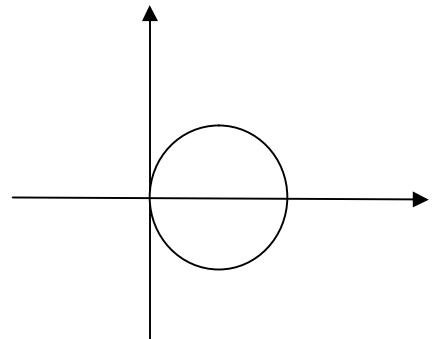
کنید.

حل

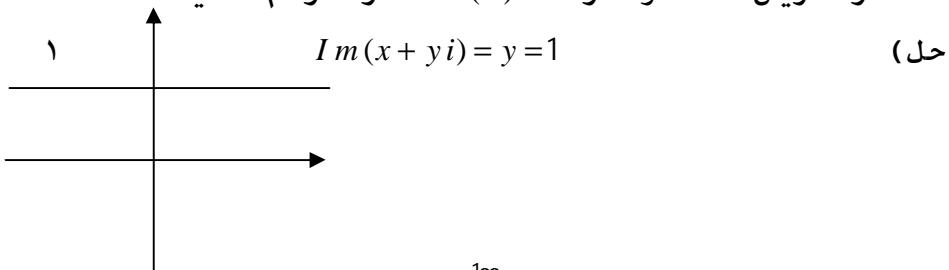
٥

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i \\ Re\left(\frac{1}{Z}\right) &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1\end{aligned}$$



٥. در تمرین ٤ نمودار $Im(Z)=1$ را رسم کنید.



٦. فرض کنید $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + yi$ ، در این صورت

x و y را حسابه کنید.

حل) طبق تصاعد هندسی داریم :

$$\sum_{k=0}^{100} i^k = \frac{1-i^{101}}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1 = x + yi \Rightarrow x = 1 , y = 0$$

۷. اگر $\frac{x+yi}{x-yi} = x - yi$ مقادیر حقیقی x و y را

بیابید.

حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned}
 x + yi &= (x - yi)^2 = x^2 + (-yi)^2 - 2x \cdot yi \\
 &= (x^2 - y^2) - 2xyi \\
 \Rightarrow &\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ -2xy = y \end{cases} \\
 y = 0 &\Rightarrow x = 0, x = 1 \\
 y \neq 0 &\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

۱. اگر f یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد:

$$\overline{f(Z)} = f(\bar{Z}) \quad \text{نشان دهید.}$$

$$\begin{aligned}
 f(Z) &= a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 \\
 \overline{f(Z)} &= \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 \\
 &= \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 \\
 &= a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = f(\bar{Z})
 \end{aligned}$$

قرین صفحه ۵۴۰.

فرض کنید $Z_2 = a_2 + b_2i$, $Z_1 = a_1 + b_1i$ با در نظر گرفتن

نمایش هندسی اعداد Z_1, Z_2 , ثابت کنید

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

حل) اگر Z_2, Z_1 را به صورت بردار

در نظر بگیریم، آنگاه

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

و این خاصیت از جمع بردارها در R^2 نتیجه می شود.

قرین صفحه ۵۴۳.

۲. فرض کنید Z_1, Z_2, \dots, Z_n اعداد مختلط باشند. در

این صورت خواه زیر برقرارند.

۷

فصل دوازدهم: اعداد مختلف

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1||Z_2| \dots |Z_n| \quad (\text{الف})$$

حل) با استفاده از استقراء داریم:

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1(Z_2 Z_3 \dots Z_n)| = |Z_1| |Z_2 Z_3 \dots Z_n| = |Z_1| |Z_2| \dots |Z_n|$$

$$|Z^n| = |Z|^n \quad (\text{ب})$$

حل) کافی است در قسمت قبل قرار دهیم:

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z$$

$$\operatorname{Re}(Z) \leq |Z| \quad (\text{ج})$$

(حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |Z| \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$$

$$|Z| = |\bar{Z}| \quad (\text{د})$$

حل) اگر روابط داشتیم:

$$Z = x + yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \Rightarrow |Z| = |\bar{Z}|$$

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| \quad (\text{ه})$$

حل) اگر Z_1, Z_2 را به عنوان دو بردار در

R^2 در نظر بگیریم داریم:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos q$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| = (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + \dots + |Z_n| \quad (\text{و})$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ^

حل) با استقراء و استفاده از قسمت (۵) مطلب ثابت می شود.

$$\begin{aligned} |Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| &= |Z_1 + (Z_2 + \dots + Z_n)| \\ &\leq |Z_1| + |Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n| \end{aligned}$$

$$|Z_1 - Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad \text{یا} \quad |Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned} |Z_1| &= |(Z_1 + Z_2) + (-Z_2)| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \\ \Rightarrow |Z_1| - |Z_2| &\leq |Z_1 + Z_2| \end{aligned}$$

اگر Z_2 را به $-Z_2$ تبدیل کنیم داریم:

$$|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$$

$$Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad Z_2 = 3 - 2i \quad Z_1 = 2 + i \quad (\text{اعداد} \cdot ۲)$$

ختلط باشند؛ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

$$|3Z_1 - 4Z_2| \quad (\text{الف})$$

$$3Z_1 - 4Z_2 = -6 + 11i \Rightarrow |3Z_1 - 4Z_2| = \sqrt{157} \quad (\text{حل})$$

$$A = \left| \frac{2Z_2 + Z_1 - 5 - i}{2Z_1 - Z_2 + 3 - i} \right|^3 \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$2Z_2 + Z_1 - 5 - i = 3 - 4i$$

$$2Z_1 - Z_2 + 3 - i = 4 + 3i$$

$$\Rightarrow A = \frac{|3 - 4i|^3}{|4 + 3i|^3} = \frac{(\sqrt{25})^3}{\sqrt{25}^3} = 1$$

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

٣. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

$$(الف) \quad 1-i \Rightarrow |1-i| = \sqrt{2}, \quad Arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$(ب) \quad -1+i \Rightarrow |-1+i| = \sqrt{2}, \quad Arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$(ج) \quad 1 \Rightarrow |1|=1, \quad Arg(1)=0$$

$$(د) \quad 2i \Rightarrow |2i|=2, \quad Arg(2i)=\frac{\pi}{2}$$

٤. فرض کنید $Z = x + yi$ و مکان Z را

تعیین کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} Z - 1 + i &= (x - 1) + (y + 1)i \\ \Rightarrow |Z - 1 + i| &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

مکان دایره ای به مرکز $C(1, -1)$ و شعاع ۱ است.

۵. مکان هندسی نقاط $Z = x + yi$ را در حالات زیر تعیین کنید.

$$(الف) \quad |Z + 1| = |Z - 1|$$

(حل)

$$\begin{aligned} |(x + 1) + yi| &= |(x - 1) + yi| \\ \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \quad \Rightarrow (x + 1)^2 = (x - 1)^2 \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۰

$$|Z + i| = |Z - 1|$$

(ب)

(حل)

$$\begin{aligned} |x + (y+1)i| &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ \Rightarrow 2y &= -2x \quad \Rightarrow \quad y = -x \end{aligned}$$

۶. نشان دهید که

$$|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$$

(حل)

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q + |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos q \\ = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) \end{aligned}$$

۷. فرض کنید Z_3, Z_2, Z_1 سه عدد مختلط نا صفر

باشد به طوری که :

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \mathbf{0} \quad , \quad |Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$$

ثابت کنید.

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = \mathbf{0} \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \mathbf{0} \quad (\text{الف})$$

حل) الف) رابطه $Z_i \bar{Z}_i = |Z_i|^2$ را در نظر بگیرید از این

$$\bar{Z}_i = \frac{|Z_i|^2}{Z_i}$$

۱۱

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 + Z_3 = \mathbf{0} &\Rightarrow \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \frac{|Z_1|^2}{Z_1} + \frac{|Z_2|^2}{Z_2} + \frac{|Z_3|^2}{Z_3} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow |Z_1|^2 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ب) طبق قسمت الف ، با خرج مشترک گیری داریم :

$$\frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 Z_3} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 = \mathbf{0}$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \mathbf{0} \Rightarrow (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) = \mathbf{0} \Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = \mathbf{0}$$

. معادله زیر را بر حسب تابع مزدوج بیان کنید.

$$2x + y = 5$$

$$\begin{aligned} Z = x + y i & , \bar{Z} = x - y i \Rightarrow Z + \bar{Z} = 2x , \bar{Z} - Z = 2y i \\ \Rightarrow (Z + \bar{Z}) + \frac{Z - \bar{Z}}{2i} &= 5 \end{aligned}$$

. هر عدد که ریشه معادله ای به فرم زیر باشد :

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = \mathbf{0}$$

که در آن $a_i \in R$ ، یک عدد جبری نام دارد .

ثابت کنید $Z = \sqrt[3]{4} - 2i$ جبری است .

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned}
 Z + 2i = \sqrt[3]{4} &\Rightarrow (Z + 2i)^3 = 4 \\
 &\Rightarrow Z^3 + 6Z^2i - 12Z - 8i = 4 \\
 &\Rightarrow Z^3 - 12Z - 4 = (8 - 6Z^2)i \\
 &\Rightarrow (Z^3 - 12Z - 4)^2 = 6Z^2 - 8 \\
 Z^6 + 144Z^2 + 16 - 24Z^4 - 8Z^3 + 96Z - 6Z^2 + 8 &= 0
 \end{aligned}$$

پس Z عدد جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|Z|=1$ ، آنگاه برای هر دو عدد مختلط a, b که حداقل یکی از آنها خالف صفر است داریم :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{aZ + b}{\bar{b}Z + \bar{a}} \right| &= 1 \\
 |aZ + b| &= \left| Z \left(a + \frac{b}{Z} \right) \right| = |Z| \left| a + \frac{b\bar{Z}}{|Z|^2} \right| \\
 &= |a + b\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}Z| \quad (\text{حل}) \\
 \Rightarrow \left| \frac{aZ + b}{\bar{a} + \bar{b}Z} \right| &= \left| \frac{aZ + b}{\bar{a} + \bar{b}Z} \right| = 1
 \end{aligned}$$

۱۱. اگر $Z = x + yi$ نشان دهید که :

$$|Re(Z)| + |Im(Z)| \leq \sqrt{2}|Z| \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned}
 2|Z|^2 &= 2(\sqrt{|Re(Z)|^2 + |Im(Z)|^2})^2 \\
 &= 2(|Re(Z)|^2 + |Im(Z)|^2) \geq (|Re(Z)| + |Im(Z)|)^2 \\
 \Rightarrow |Re(Z)| + |Im(Z)| &\leq \sqrt{2}|Z|
 \end{aligned}$$

۱۳

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

۱۲. نشان دهید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ اگر و تنها اگر

$$|Z_2| = 1, |Z_1| = 1$$

حل) فرض کنید $|Z_1| = |Z_2| = 1$ باشد آنگاه

$$|Z_1 - Z_2| = \left| Z_1 \left(1 - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right| = |Z_1| \left| 1 - \frac{Z_2 \bar{Z}_1}{|Z_1|^2} \right| = |1 - Z_2 \bar{Z}_1|$$

حال فرض کنید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ باشد. تساوی بالا را

به صورت بر عکس ادامه دهید .

۱۳. فرض کنید $Z \neq 0$ عدد خلط باشد. ثابت کنید

$$Z = \frac{1}{\bar{Z}} \text{ اگر و تنها اگر } |Z| = 1$$

• $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ پس $Z \bar{Z} = |Z|^2 = 1$ $|Z| = 1$ اگر حل) اگر

• $|Z| = 1$ پس $|Z|^2 = Z \bar{Z} = 1$ $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ اگر

۱۴. مکان عدد خلط Z را چنان پیدا کنید که اعداد خلط Z, iZ, Z^2 بر یک استقامت باشند.

(حل)

$$\frac{z - iZ}{Z - i} = \frac{iZ - i}{iZ - Z} \Rightarrow -(Z - iZ)^2 = i(Z - 1)(Z - i)$$

$$\Rightarrow -z^2 + 2iZ^2 + Z^2 = iZ^2 = Z = 1 - iZ$$

$$i(Z^2 + Z) = Z + 1 \Rightarrow iZ = 1$$

$$x = 0, -y = 1, y = -1$$

$Z = 0, Z = i, Z = -i$ پس

۱۴

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۵. اگر C, A اعداد حقیقی و

$$AZ\bar{Z} + DZ + D\bar{Z} + C = \mathbf{0}, \quad Z = x + yi, \quad D = a + bi, \quad AC < 0$$

و $(-\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$ نشان دهد مکان Z دایره ای به مرکز شعاع آن به صورت زیر است.

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

(حل)

$$AZ\bar{Z} = A(x^2 + y^2)$$

$$DZ + D\bar{Z} = 2Re(DZ) = 2(ax - by)$$

$$\Rightarrow Ax^2 + Ay^2 + 2ax - 2by + C = 0$$

$$\Rightarrow A(x + \frac{a}{A})^2 + A(y - \frac{b}{A})^2 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{A^2} + C = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{A})^2 + (y - \frac{b}{A})^2 = \frac{a^2}{A^3} + \frac{b^2}{A^3} - \frac{C}{A}$$

مرکز دایره

$$\bullet \quad R = \sqrt{\frac{a^2}{A^3} + \frac{b^2}{A^3} - \frac{C}{A}}, \quad (-\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$$

۱۶. معادله خط $Ax + By + C = 0$ را به شکل خلتل

بنویسید.

$$A \frac{Z + \bar{Z}}{2} + B \frac{Z - \bar{Z}}{2i} + C = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۷. معادله دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ را به فرم خلتل بنویسید.

$$Z\bar{Z} + Z + \bar{Z} + i(Z - \bar{Z}) = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۵

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

۱۸. اگر Z_1, Z_2 دو عدد مختلف باشند، به طوری که ثابت کنید اختلاف آرماگون های

$\frac{p}{2}$ برابر Z_2, Z_1 است.

(حل)

$$|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2 \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos a$$

$$\Rightarrow 4|Z_1||Z_2|\cos q = 0 \Rightarrow q = \frac{p}{2}$$

۱۹. فرض کنید $a, b \in C$ دو عدد حقیقی نابرابر باشند.

نشان دهید اگر $|Z + ai| = |Z + bi|$ آنگاه

$$Z - \bar{Z} = -(a + b)i$$

(حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ay = b^2 + 2by$$

$$(2a - 2b)y = b^2 - a^2 \Rightarrow y = -\frac{a+b}{2}$$

$$Z - \bar{Z} = 2yi = -(a+b)i$$

قرین صفحه ۵۴۶ .

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$Z_1 = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5p}{6} + i \sin \frac{5p}{6} \right) \quad (\text{الف})$$

$$b) Z_2 = \frac{(i-1)^2}{i} = \frac{-2i}{i} = -2 = 2(\cos p + i \sin p) \quad (\text{ب})$$

$$c) Z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \left(-\frac{p}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{p}{3} \right) \right) \quad (\text{ج})$$

قرین صفحه ۵۴۷.

ثابت کنید دستور دمو آور برای $n < 0$ صحیح نیز برقرار است.

حل) اگر قرار دهیم $n = -m$, $e^{iq} = \cos q + i \sin q$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} Z = e^{iq} \Rightarrow Z^{-m} &= e^{-imq} = \cos(-mq) + i \sin(-mq) \\ \Rightarrow n < 0 \quad \Rightarrow (\cos q + i \sin q)^n &= \cos(nq) + i \sin(nq) \end{aligned}$$

قرین صفحه ۵۴۷.

اگر $Z_2 \neq 0$, Z_2, Z_1 دو عدد خلط باشند و ثابت کنید

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

(حل)

١٧

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$Z_1 = |Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1) , \quad Z_2 = |Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1)}{|Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2)} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} (\cos q_1 + i \sin q_1)(\cos q_2 + i \sin q_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} (\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2))$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = _1 - _2 = \operatorname{Arg} Z_1 - \operatorname{Arg} Z_2$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \left| \cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2) \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

تمرين صفحه ٥٤٩ .

١. ثابت کنید :

$$\left(\frac{1+i \operatorname{tg} a}{1-i \operatorname{tg} a} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n a}{1-i \operatorname{tg} n a}$$

(حل)

$$\left(\frac{1+i \operatorname{tg} a}{1-i \operatorname{tg} a} \right)^n = \left(\frac{1+i \frac{\sin a}{\cos a}}{1-i \frac{\sin a}{\cos a}} \right)^n = \left(\frac{\cos a + i \sin a}{\cos a - i \sin a} \right)^n$$

$$= \left(\frac{\cos a + i \sin n a}{\cos n a - i \sin n a} \right) = \frac{1+i \operatorname{tg} n a}{1-i \operatorname{tg} n a}$$

٢. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل

$$I = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

(حل)

حل المسائل رياضي عمومي (١)

$$\begin{aligned}
 I &= (1+i)^n (1-i)^{2-n} = \sqrt{2} (\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4})^n \sqrt{2} (\cos \frac{p}{4} - i \sin \frac{p}{4})^{2-n} \\
 &= 2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{1-n}{2}} (\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{4}) (\cos \frac{(2-n)p}{4} - i \sin \frac{(2-n)p}{4}) \\
 &= 2(\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{2})
 \end{aligned}$$

٣. عدد خلط $(1+i)^n$ را به دو طريق حاسبه و نتيجه را مقاييسه کنيد.

(حل)

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow n = 2k \Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k$$

$$n = 2k+1 \Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k (1+i)$$

٤. ثابت کنيد.

$$\frac{\sin 4q}{\sin q} = 2 \cos 3q + 6 \cos q - 4$$

(حل)

$$Z = \cos q + i \sin q \Rightarrow Z^4 = \cos 4q + i \sin 4q$$

$$((\cos^2 q - \sin^2 q) + 2 \sin q \cos q i)^2 = \cos 4q + i \sin 4q$$

$$(\cos 2q + \sin 2q i)^2 =$$

تمرين صفحه ٥٥٦ .

$$1 - \text{معادله } Z^2 + (2i - 3)Z + 5 - i = 0 \text{ را حل کنيد.}$$

(حل)

۱۹

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$\begin{aligned} \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= i - 5 - \frac{(2i-3)^2}{4} \\ \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= \frac{4i - 20 + 4 + 6i - 9}{4} = \frac{10i - 25}{4} \\ Z &= \frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{10i-25} \end{aligned}$$

۲- فرض کنید $(Z \neq 1)$ در این صورت معادله زیر را حل کنید:

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5 = \mathbf{0}$$

حل) دو طرف را در $(1-Z)$ ضرب می کنیم.

$$1 - Z^6 = \mathbf{0} \Rightarrow Z^6 = 1$$

$$W_i = \cos\left(\frac{kp}{3}\right) + i \sin\left(\frac{kp}{3}\right)$$

$$W_0 = 1, \quad W_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad W_3 = -1$$

$$W_4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad W_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1 - Z = 1$ ریشه قابل قبول نیست. چون با ضرب تولید شده است.

۳. اگر W یکی از ریشه های موهومی، n ام واحد باشد. نشان دهید:

$$1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = \mathbf{0}$$

(حل)

۲۰

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\begin{aligned} W \neq 1 & , \quad W^n = 1 \Rightarrow W^n - 1 = \mathbf{0} \\ & \Rightarrow (W - 1)(W^{n-1} + W^{n-2} + \dots + W + 1) = \mathbf{0} \\ W \neq 1 & \Rightarrow 1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

۴. معادله زیر را حل کنید:

$$\bullet \quad iZ^3 + 8 = \mathbf{0}$$

(حل)

$$-Z^3 + 8i = \mathbf{0} \Rightarrow Z^3 = 8i$$

$$r = 8, \quad q = \frac{p}{2}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} \right)$$

$$W_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$W_1 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$W_3 = -2i$$

۵. ریشه های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید.

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}}, \quad r = \sqrt{2}, \quad q = \frac{3p}{4}$$

$$W_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11p}{12} + i \sin \frac{11p}{12} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[6]{2} \cos \frac{19p}{12} + i \sin \frac{19p}{12}$$

ب) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{3}}$, $r = 4$, $q = \frac{7p}{6}$

$$W_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{7p}{24} + i \sin \frac{7p}{24} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{19p}{24} + i \sin \frac{19p}{24} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{31p}{24} + i \sin \frac{31p}{24} \right)$$

$$W_3 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{43p}{24} + i \sin \frac{43p}{24} \right)$$

۷. معادله $6Z^4 - 25Z^3 + 32Z^2 + 3Z - 10 = 0$ را حل کنید.

حل) مقسوم علیه های -10 برابر ± 1 و ± 2 و ± 5 است.

مقسوم علیه های 6 برابر ± 1 و ± 2 و ± 3 است.

۸. معادله $(1+Z)^5 = (1-Z)^5$ را حل کنید.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

(حل)

$$\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^5 = 1 \quad , \quad W^5 = 1, \quad W = \frac{Z+1}{Z-1}$$

$$W_0 = 1 \Rightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = 1 \Rightarrow Z_0 = \mathbf{0}$$

$$W_1 = \cos \frac{2p}{5} + i \sin \frac{2p}{5} = \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$W_2 = \cos \frac{4p}{5} + i \sin \frac{4p}{5} = \frac{1+Z_2}{1-Z_2}$$

$$W_3 = \cos \frac{6p}{5} + i \sin \frac{6p}{5} = \frac{1+Z_3}{1-Z_3}$$

$$W_4 = \cos \frac{8p}{5} + i \sin \frac{8p}{5} = \frac{1+Z_4}{1-Z_4}$$

١١. هر یک از عبارات زیر را ساده کنید.

(الف)

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{6}} =$$

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{-i\frac{p}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{p}{12}}$$

$$Z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} + i \sin \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} \right)$$

۲۳

فصل دوازدهم : اعداد مختلف

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} \\ \text{ب) } & \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{i\frac{p}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5p}{12}} \\ Z_k &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) \right) \end{aligned}$$

۱۲. معادله $(x+i)^n - (x-i)^n = \mathbf{0}$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

$$\begin{aligned} (x+i)^n - (x-i)^n &= \mathbf{0} \Rightarrow (x+i)^n - (x-i)^n \\ \Rightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n &= 1 \\ Z &= \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow Z^n = 1 \\ Z_k &= \cos \frac{2kp}{8} + i \sin \frac{2kp}{8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{حل}) \\ Z_k &= \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow xZ_k - iZ_k = x+i \\ x(Z_k - 1) &= i(Z_k + 1) \\ x &= i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

۱۳) منحنی ای بیابید که معادله اش باشد که در آن a, c اعداد حقیقی مثبت اند به طوری که $|Z+c| + |Z-c| = 2a$. $a > c$ حل) طبق تعریف، معادله فوق، معادله یک بیضی است.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

۲۳

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

١٤. معادله خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ را ب--- شکل خلط بنویسید.

$$A\left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right) + B\left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right) + C = \mathbf{0} \quad (\text{حل})$$

۱۵. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1+i$, $2i$, $1-i$ می گذرد.

$$\text{حل) فرض کنید } Z_0 = x_0 + y_0 i \text{ مرکز دایره باشد پس:}$$

$$\begin{aligned} |Z_{\mathbf{0}} - (1-i)| &= |Z_{\mathbf{0}} - (1+i)| = |Z_{\mathbf{0}} - 2i| \\ \Rightarrow (x_{\mathbf{0}} - 1)^2 + (y_{\mathbf{0}} + 1)^2 &= (x_{\mathbf{0}} - 1)^2 + (y_{\mathbf{0}} + 1)^2 \Rightarrow y_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow (x_{\mathbf{0}} - 1)^2 + 1 &= x_{\mathbf{0}}^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad x_{\mathbf{0}}^2 - 2x_{\mathbf{0}} + 2 = x_{\mathbf{0}}^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{مرکز دایره } C(-1, \mathbf{0}) \text{ است.}$$

$$R = \left| (-1 + 0) - (1 - i) \right| = \left| -2 + i \right| = \sqrt{5}$$

$$\text{شعاع دایره برابر است. } R = \sqrt{5}$$

۱۶) مکان Z در هر حالت تعیین کنید.

$$\text{و } (\mathbf{0}, +1) \quad : \quad \text{دایره به مرکز } |Z - i| = 1 \quad \text{(الف)}$$

• $R=1$ شعاع

$$\text{ب) } |Z - 1 - i| = 1 \quad \text{دایره به مرکز } (1,1) \quad \text{و شعاع}$$

• $R = 1$

$$\text{دایره به مرکز } (0,2) \text{ و شعاع } |Z - 2i| = \frac{1}{2} \quad (ج)$$

$$\bullet \quad R = \frac{1}{2}$$