

حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

کرداورنده:

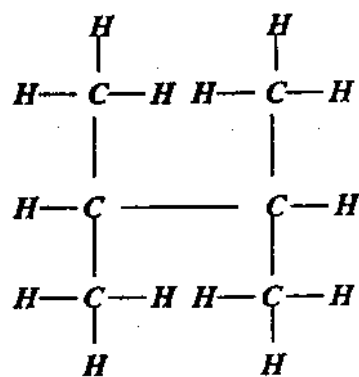
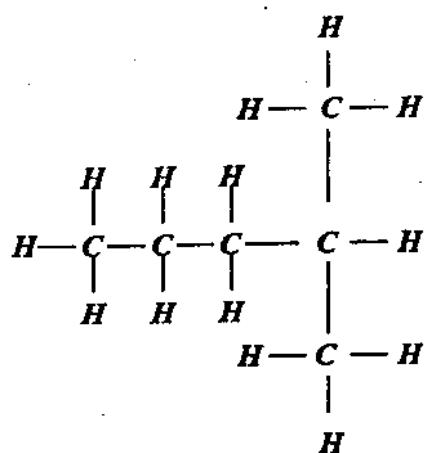
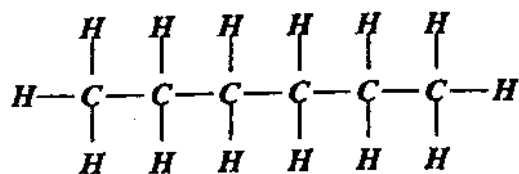
**Pnu-Soal.ir**

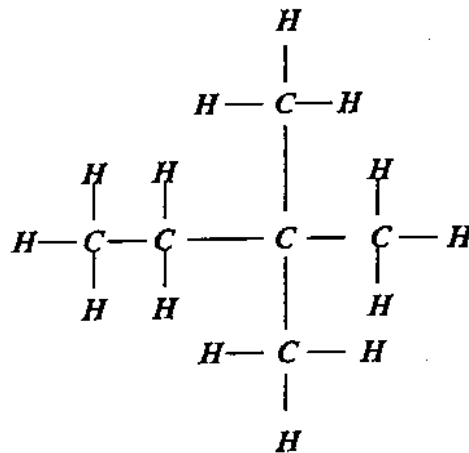
فصل، منقسم

## فصل ۷

۱- تعداد ایزومرهای هگزان ( $C_6H_{14}$ ) را به دست آورید.

پاسخ:





۲- اگر  $T_1(V_1, E_1)$  و  $T_2(V_2, E_2)$  دو درخت باشند که روابط  $|E_1| = ۱۷$  و  $|V_1| = ۲$  و  $|V_2| = ۲$  در مورد آن‌ها صادق است، در این صورت،  $|V_1|$ ،  $|V_2|$  و  $|E_2|$  را به دست آورید.

پاسخ:

برای هر درخت داریم:

$$|V| = |E| + ۱$$

لذا:

$$|V_1| = |E_1| + ۱ \Rightarrow |V_1| = ۱۸$$

$$|V_2| = ۲|V_1| \Rightarrow |V_2| = ۳۶$$

$$|V_2| = |E_2| + ۱ \Rightarrow |E_2| = ۳۵$$

۳- الف) اگر  $G = (V, E)$  یک جنگل با  $|V| = v$ ،  $|E| = e$  و  $k$  مؤلفه (درخت) باشد، در این صورت رابطه بین  $k, e, v$  چگونه است؟

ب) حداقل تعداد یالهایی که باید به  $G$  اضافه کرد تا به یک درخت تبدیل بشود، چقدر است؟

پاسخ:

الف) چون  $G$  دارای  $k$  مؤلفه است که هر کدام از مؤلفه‌ها یک درخت می‌باشد. بنابراین با فرض اینکه  $G_1, \dots, G_k$  مؤلفه‌های  $G$  باشند داریم:

$$|V_i| = |E_i| + ۱ \quad ۱ \leq i \leq k$$

$$\Rightarrow |V| = \sum_{i=1}^k |V_i| = \sum_{i=1}^k (|E_i| + ۱) = \sum_{i=1}^k |E_i| + k$$

همچنین داریم :

$$|E| = \sum_{i=1}^k |E_i|$$

در نتیجه :

$$|V| = |E| + k$$

ب) اگر بخواهیم با افزودن یالهایی به  $G$ ، از  $G$  یک درخت به دست آوریم . در این درخت خواهیم داشت :

$$|V| = |\bar{E}| + 1$$

که در آن  $\bar{E}$  تعداد یالهای درخت است .

از طرفی داریم :

$$|V| = |E| + k$$

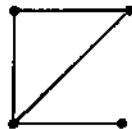
$$\Rightarrow |\bar{E}| + 1 = |E| + k$$

$$\Rightarrow |\bar{E}| - |E| = k - 1$$

لذا ، حداقل باید  $k - 1$  یال به  $G$  اضافه کنیم .

۴- مثالی از یک گراف بی سو ، مثل  $G = (V, E)$  ارائه دهید که برای آن رابطه  $|V| = |E| + 1$  برقرار ، ولی  $G$  درخت نباشد .

پاسخ :



۵- الف) اگر درختی ، چهار رأس از درجه ۲ ، یک رأس از درجه ۳ ، ۲ رأس از درجه ۴ ، و یک رأس از درجه ۵ داشته باشد ، تعداد برگهای آن چقدر است ؟

ب) اگر درخت  $T = (V, E)$  ،  $v_1$  رأس از درجه ۲ ،  $v_2$  رأس از درجه ۴ ، و  $v_m$  رأس از درجه  $m$  داشته باشد ، صورت  $|V|$  و  $|E|$  چگونه هستند ؟

پاسخ :

الف) گراف گفته شده ، درخت نمی باشد . زیرا می دانیم در یک درخت حداقل یک رأس از درجه یک وجود دارد .

ب) گرافی با توصیف فوق وجود ندارد. زیرا، فرض کنیم گراف مورد نظر دارای  $n$  رأس باشد. بنا به فرض داریم:

$$\deg(v_i) = i \quad 4 \leq i, \quad \deg(v_7) = 2, \quad \deg(v_1) = 4$$

روشن است درجه  $V_1$  نیز حداقل ۱ می باشد. بنابراین با توجه به رابطه

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|, \quad |V| = |E| + 1$$

داریم:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 1 + 2 + 4 + 4 + 5 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2(|V| - 1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2(n-1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n + 6 = 0$$

اما، معادله فوق ریشه ندارد. بنابراین گراف توصیف شده وجود ندارد.

۶- گراف بی سو و همبند  $G = (V, E)$ ، ۳۰ راس دارد. حداکثر مقدار  $|V|$  چقدر است؟

پاسخ:

چون گراف همبند است، حداکثر مقدار برای  $|V|$  زمانی به دست می آید که گراف یک درخت باشد، که در این صورت به دست می آوریم:

$$|V| = |E| + 1 = 31$$

۷- درخت  $T = (V, E)$ ،  $|V| = n \geq 2$  راس دارد. تعداد مسیرهای متمایز (به عنوان زیرگراف) در  $T$ ، چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به قضیه ۱-۷، اگر  $a, b$  دو رأس از  $T$  باشند آنگاه فقط یک مسیر منحصر بفرد بین  $a, b$  وجود دارد. بنابراین متناظر با هر مجموعه دو عضوی  $\{a, b\}$  از  $V$ ، یک مسیر وجود دارد. پس، تعداد کل مسیرهای متمایز در  $T$  برابر است با:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

۸- فرض کنید که  $G = (V, E)$  یک گراف همبند و بدون حلقه است که در آن  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ،  $n \geq 2$  و  $\deg(v_i) \geq 2$  و برای  $2 \leq i \leq n$  نشان دهید که  $G$  دور دارد.

☞ پاسخ:

نشان می‌دهیم  $G$  درخت نیست. بنا به فرض مساله داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \deg(v_i) &= \deg(v_1) + \sum_{i=2}^n \deg(v_i) \\ &\geq 1 + \sum_{i=2}^n 2 = 1 + 2(n-1) = 2n-1 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$2|E| \geq 2n-1$$

از آنجا که  $2n-1$  فرد و  $2|E|$  زوج است پس باید داشته باشیم  $2|E| \geq 2n$  یا  $|E| \geq n$ . لذا رابطه  $|V| = |E| + 1$  نمی‌تواند برقرار باشد. زیرا  $|V| = n$ . در نتیجه  $G$  گراف نیست. پس  $G$  دور دارد.

۹- چند درخت پوشای متمایز (هر چند یکریخت) برای گراف  $C_n$  (دور با  $n$  رأس،  $n \geq 3$ ) وجود دارد؟

☞ پاسخ:

$C_n$  یک دور است. پس هیچ رأسی در آن تکرار نشده است از این مطلب نتیجه می‌شود که هیچ یالی نیز، در  $C_n$  تکراری نیست. فرض کنیم  $C_n$  به صورت زیر است:

$$V_1 - V_2 - \dots - V_n - V_1$$

که در آن رأس ابتدایی و انتهایی بر هم منطبق هستند و هیچ رأس و یال تکراری نداریم. با توجه به ساختار فوق، روشن است اگر یالی را از  $C_n$  حذف کنیم گراف باقیمانده همبند بوده و هیچ دوری نخواهد داشت. بنابراین، یک درخت پوشا برای  $C_n$  بدست می‌آید. از این که یالهای متفاوت، درخت‌های پوشای متمایز ایجاد می‌کنند، لذا،  $n-1$  درخت پوشا برای  $C_n$  وجود دارد.

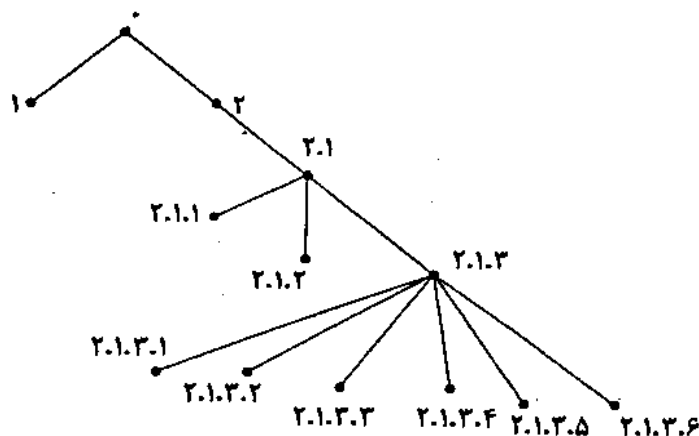
۱۰- فرض کنید که  $T = (V, E)$  یک درخت ریشه‌دار و سودار است که به وسیله سیستم نشانی عمومی مرتب شده است:

الف) اگر رأس  $v \in V$ ، دارای نشانی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷، ۱۲۶۸، ۱۲۶۹، ۱۲۷۰، ۱۲۷۱، ۱۲۷۲، ۱۲۷۳، ۱۲۷۴، ۱۲۷۵، ۱۲۷۶، ۱۲۷۷، ۱۲۷۸، ۱۲۷۹، ۱۲۸۰، ۱۲۸۱، ۱۲۸۲، ۱۲۸۳، ۱۲۸۴، ۱۲۸۵، ۱۲۸۶، ۱۲۸۷، ۱۲۸۸، ۱۲۸۹، ۱۲۹۰، ۱۲۹۱، ۱۲۹۲، ۱۲۹۳، ۱۲۹۴، ۱۲۹۵، ۱۲۹۶، ۱۲۹۷، ۱۲۹۸، ۱۲۹۹، ۱۳۰۰، ۱۳۰۱، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۵، ۱۳۰۶، ۱۳۰۷، ۱۳۰۸، ۱۳۰۹، ۱۳۱۰، ۱۳۱۱، ۱۳۱۲، ۱۳۱۳، ۱۳۱۴، ۱۳۱۵، ۱۳۱۶، ۱۳۱۷، ۱۳۱۸، ۱۳۱۹، ۱۳۲۰، ۱۳۲۱، ۱۳۲۲، ۱۳۲۳، ۱۳۲۴، ۱۳۲۵، ۱۳۲۶، ۱۳۲۷، ۱۳۲۸، ۱۳۲۹، ۱۳۳۰، ۱۳۳۱

- ب) برای رأس ۷ قسمت (الف) نشانی پدرش را پیدا کنید .  
 ج) تعداد نیاکان رأس ۷ چقدر است ؟  
 د) با حضور ۷ در  $T$  ، نشانی‌های دیگر سیستم چگونه هستند ؟

پاسخ :

- الف) با توجه به سیستم نشانی عمومی از اینکه عدد سمت راست ۲.۱.۳.۶ برابر ۶ می‌باشد بنابراین رأس متناظر با این نشان ، حداقل باید ۵ برادر داشته باشد که با خود رأس مشترکاً شش پسر رأس متناظر با ۲.۱.۲ باشند .  
 ب) با توجه به (الف) نشانی پدر ۲.۱.۳.۶ ، رأس ۲.۱.۳ می‌باشد .  
 ج) با توجه به سیستم نشانی عمومی ، ۲.۱.۳.۶ دارای چهار نیای زیر می‌باشد :  
 ۲.۱ و ۲.۰ و ۲.۱.۳ و ۲.۰
- د) گراف  $T$  به صورت زیر می‌تواند باشد .



۱۱- عبارت  $(\pi z^r)/(17+x-y)$  را به صورت نماد لهستانی بنویسید .

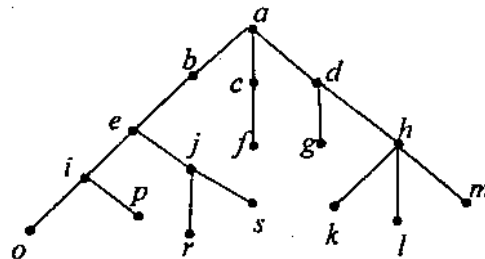
پاسخ :

با استفاده از نماد لهستانی داریم :

$$(w+x-y)/(\pi z^r) = /+w-xy*\pi**zzz$$



۱۲- نتیجه پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب را برای رنوس درخت زیر بنویسید.

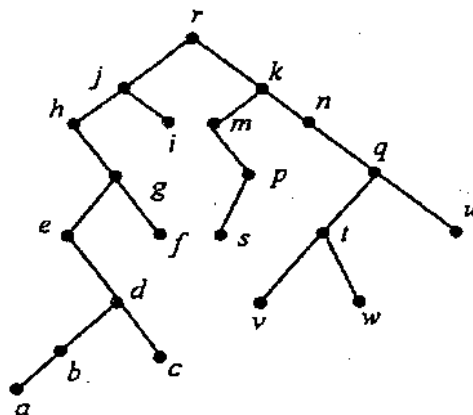


پاسخ :

نتیجه پیمایش پیش به صورت  $m, l, k, h, g, f, c, s, r, j, p, o, i, e, b, a$  خواهد بود.  
همچنین نتیجه پس پیمایش نیز به صورت زیر است:

$a, d, h, m, l, k, g, c, f, b, e, j, s, r, i, p, o$

۱۳- نتیجه پیمایش پیش ترتیب،  
میان ترتیب و پس ترتیب را  
برای رنوس درخت روبه‌رو  
بنویسید.



پاسخ :

پیش پیمایش :  $u, w, v, t, q, n, s, p, m, k, i, f, c, a, b, d, e, g, h, j, r$

پس پیمایش :  $r, k, n, q, u, t, w, v, m, p, s, j, i, h, g, f, e, d, c, b, a$

میان ترتیب :  $q, u, t, w, v, n, k, m, p, s, r, j, i, h, g, f, e, d, c, b, a$

۱۴- فرض کنید که  $G = (V, E)$  گراف بی‌سوی تعریف شده به وسیله ماتریس همسایگی  $A(G)$  ارائه شده در زیر باشد.

الف) با اعمال الگوریتم  $BFS$  بر روی  $A(G)$ ، نشان دهید که آیا  $G$  همبند است؟  
 ب) با اعمال الگوریتم  $DFS$  بر روی  $A(G)$ ، نشان دهید که آیا  $G$  همبند است؟

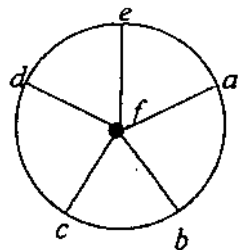
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰
$v_2$	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
$v_3$	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱
$v_4$	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
$v_5$	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰
$v_6$	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰
$v_7$	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰
$v_8$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰

پاسخ:

الف) از  $v_1$  به  $v_2, v_7$  یالی وجود دارد.  $v_2, v_7$  قبلاً ملاقات نشده‌اند. بنابراین به ته صف می‌روند. الگوریتم مجدداً از گام ۲ شروع می‌شود. زیرا صف خالی نیست.  $v_2$  در ابتدای صف قرار دارد. از رأس  $v_2$  به  $v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$  یالی وجود دارد.  $v_3$  در مرحله قبلی ملاقات است، بنابراین در اول صف قرار دارد. از  $v_3$  به  $v_4$  یالی وجود دارد.  $v_4$  در اول صف قرار دارد. از  $v_4$  به  $v_5$  یالی وجود دارد. حال  $v_5$  در اول صف قرار دارد. از  $v_5$  به  $v_6$  یالی وجود دارد. اکنون  $v_6$  در اول صف قرار دارد. از  $v_6$  به  $v_7, v_8$  یالی وجود دارد. بدین ترتیب تمام رأسها ملاقات شدند. لذا، گراف مرتبط با  $A(G)$  داده شده همبند است.

ب) با استفاده از  $DFS$  نیز همبندی گراف را نشان می‌دهیم. از سطر اول شروع می‌کنیم. از  $v_1$  می‌توان به  $v_2, v_7$  رفت. از  $v_2$  به  $v_3, v_4, v_5, v_6$  از  $v_7$  به  $v_8$  بدین ترتیب تمام رأسها ملاقات می‌شوند. لذا گراف همبند است.

۱۵- الف) برای گراف ارائه شده در شکل روبه‌رو، درخت پوشای  $BFS$  را برای حالتی که



رئوس به ترتیب

۱.  $f, e, d, c, b, a$

۲.  $f, d, c, e, b, a$

۳.  $f, e, b, d, c, a$

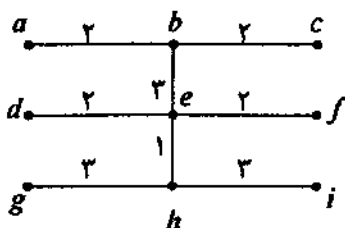
مرتب شده باشند، رسم کنید.

ب) چند درخت پوشای  $BFS$  به ریشه  $a$  وجود دارد؟



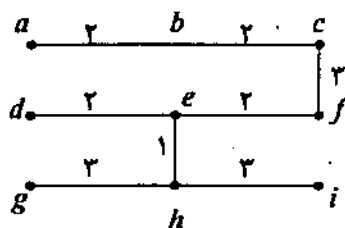
پاسخ:

درخت پوشای مینیمال که با استفاده از الگوریتم کراسکال بدست آمده به صورت زیر است:



که هزینه مینیمال برابر ۱۸ می باشد.

با استفاده از الگوریتم پریم نیز گراف پوشای مینیمال زیر بدست می آید:



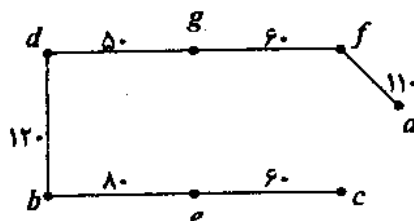
که هزینه مینیمال مانند بالا، برابر ۱۸ می باشد.

۱۷- جدول زیر، فاصله (بر حسب کیلومتر) بین ۷ شهر را نشان می دهد. با ساختن شبکه ای از اتوبان ها می خواهیم این شهرها را به هم وصل کنیم. اگر هزینه ساخت هر کیلومتر اتوبان در تمام نقاط کشور مساوی فرض شود، در این صورت، این اتوبان ها بین چه شهرهایی کشیده شوند تا هزینه کل ساخت مینیمم بشود.

	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	۱۲۰	-	-	-	-	-
<i>b</i>	۱۷۰	۲۹۰	-	-	-	-
<i>c</i>	۲۰۰	۲۸۰	۱۳۰	-	-	-
<i>d</i>	۵۰	۱۷۰	۱۲۰	۱۵۰	-	-
<i>e</i>	۲۰۰	۳۰۰	۸۰	۶۰	۱۴۰	-
<i>f</i>	۶۰	۱۱۰	۳۰۰	۱۶۰	۷۰	۱۹۵

پاسخ:

با توجه به اینکه هزینه ساخت اتویان در تمام نقاط مساوی فرض شده است. لذا درخت پوشا با کمترین طول را می‌یابیم. با توجه به جدول داده شده توسط الگوریتم پریم درخت پوشای مینیمال زیر را می‌توان برای ارتباط شهرها ساخت:



که طول مینیمال برابر خواهد بود با: ۴۸۰

۱۸- فرض کنید که  $G = (V, E)$  یک گراف بی‌سو با  $k$  مؤلفه،  $|V| = n$  رأس، و  $|E| = m$  یال باشد. نشان دهید که  $m \geq n - k$ .

پاسخ:

فرض کنیم  $G$  دارای  $k$  مؤلفه  $G_1, \dots, G_k$  باشد. با توجه به اینکه هر  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) همبند است. لذا،  $G_i$  یا یک درخت است و یا بیش از درخت یال دارد. در نتیجه:

$$|V_i| \leq |E_i| + 1 \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k |V_i| \leq \sum_{i=1}^k (|E_i| + 1)$$

$$\Rightarrow |V| \leq \sum_{i=1}^k |E_i| + \sum_{i=1}^k 1$$

$$\Rightarrow |V| \leq |E| + k \Rightarrow n - k \leq m$$

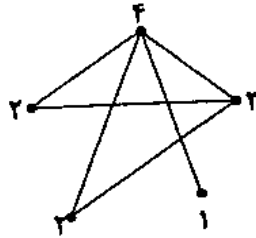
۱۹-  $n$  تایی مرتب  $d_1, d_2, \dots, d_n$  از اعداد صحیح مثبت را گرافیکال گوئیم. هرگاه، گراف بی‌سو و بدون حلقه با  $n$  رأس موجود باشد به گونه‌ای که درجه‌های رئوس آن مساوی  $d_1, d_2, \dots, d_n$  باشند. کدام یک از  $n$  تایی‌های زیر گرافیکال هستند.

(الف)  $(4, 3, 2, 2, 1)$  (ب)  $(3, 3, 3, 1)$

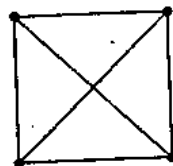
(ج)  $(6, 6, 5, 3, 3, 1)$  (د)  $(7, 6, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$

پاسخ :

الف) گرافیکال است. زیرا گراف بی سو و بدون حلقه زیر را می توان با اعداد داده شده متناظر کرد.



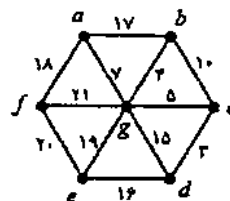
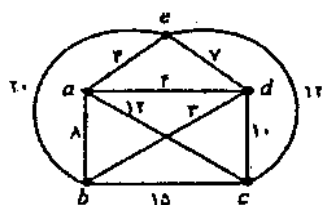
ب) گرافیکال نیست. اگر گرافی با خصوصیات خواسته شده موجود باشد، آنگاه آن گراف باید دارای چهار رأس باشد به طوریکه سه رأس از رأسهای گراف با درجه ۳ باشند که در این صورت لزوماً رأس چهارم نیز از درجه ۳ خواهد بود و نمی تواند از درجه ۱ باشد.



ج) گرافیکال نیست. گراف مورد نظر باید ۶ رأس داشته باشد. که در این صورت درجه هر کدام از رأسهای آن حداکثر می تواند ۵ باشد. وجود رأسی از درجه ۶ امکان پذیر نیست.

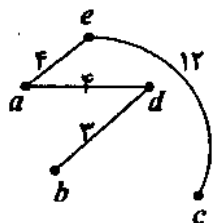
د) گرافیکال نیست. اگر گرافی با خصوصیات خواسته شده موجود باشد، آنگاه گراف باید دارای ۸ رأس باشد. فرض کنیم  $a_1, a_2, \dots, a_8$  رأسهای گراف باشند.  $a_1$  از درجه ۷ است. بنابراین از  $a_1$  به تمام دیگر رأسها یالی وجود دارد. حال  $a_2$  از درجه ۶ است.  $a_2$  یک یال از  $a_1$  دریافت کرده است لذا باید ۵ یال به ۵ رأس از ۶ رأس  $a_3, a_4, \dots, a_8$  بدهد. در این مرحله در گراف تنها یک یال از درجه ۱ می تواند وجود داشته باشد بنابراین گراف حاضر نمی تواند گراف  $(1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7)$  باشد.

۲۰- با استفاده از الگوریتم‌های کراسکال و پریم یک درخت پوشای مینم برای هر کدام از گراف‌های زیر به دست آورید.

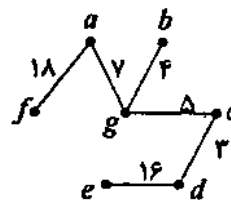


پاسخ:

با استفاده از الگوریتم کراسکال درخت‌های پوشای زیر حاصل می‌شود:

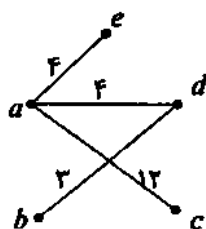


مقدار مینیمال = ۲۳

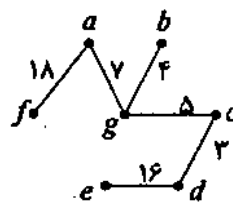


مقدار مینیمال = ۵۳

با استفاده از الگوریتم پریم درخت‌های پوشای زیر حاصل می‌شود.



مقدار مینیمال = ۲۳

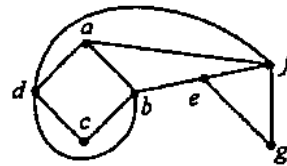
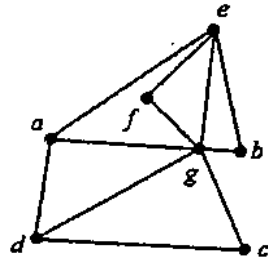


مقدار مینیمال = ۵۳

۲۱- با استفاده از الگوریتم‌های  $BFS$  و  $DFS$ ، درخت‌های پوشایی برای هر کدام از گراف‌های زیر به دست آورید.

الف) رنوس به ترتیب  $a, b, c, d, e, f, g$  مرتب شده‌اند.

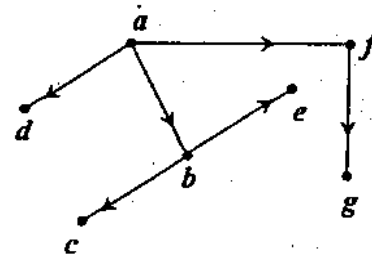
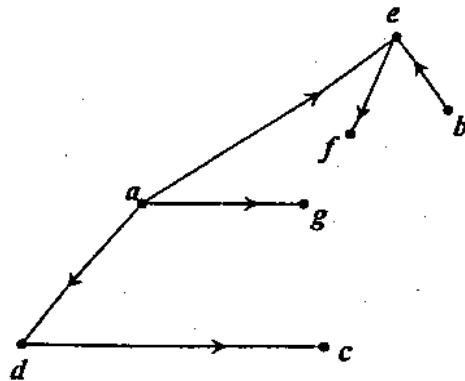
ب) رنوس به ترتیب  $a, b, c, d, e, f, g$  مرتب شده‌اند.



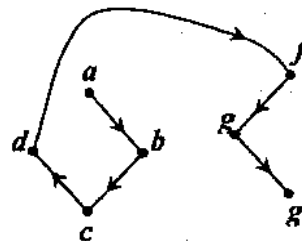
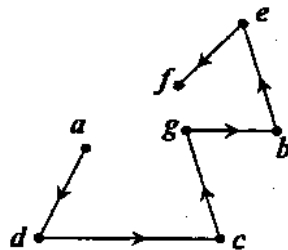
پاسخ :

الف)

روش  $BFS$

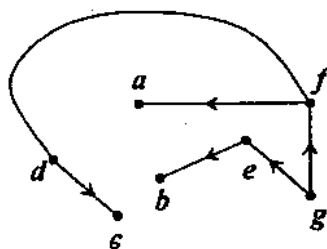
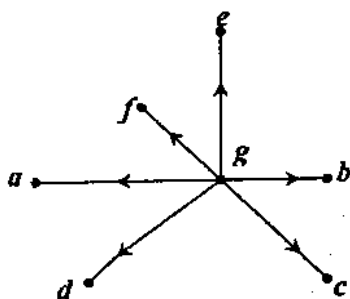


روش  $DFS$

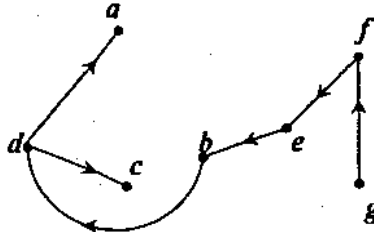
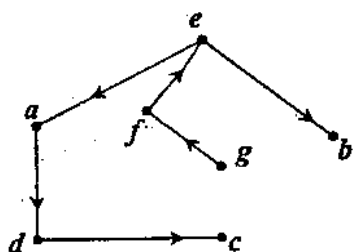




(ب) روش BFS



روش DFS



۲۲- با استفاده از الگوریتم وارshall نشان دهید که گراف  $G = (V, E)$  تعریف شده به وسیله ماتریس همسایگی  $A(G)$ ، قویاً همبند است.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

پاسخ:

با استفاده از الگوریتم وارshall بستر متعدي  $A(G) = w$  را به دست می آوریم:

$$p_1 = 3 ; \quad q_1 = 2 ; \quad k = 1$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1=1, p_2=2; q_1=2, q_2=4 : k=2$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=5; q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4 : k=3$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=5; q_1=5 : k=4$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

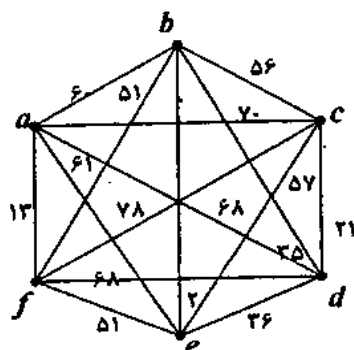
$$: k=5$$

$$p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4, p_5=5; q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4, q_5=5$$

$$w_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

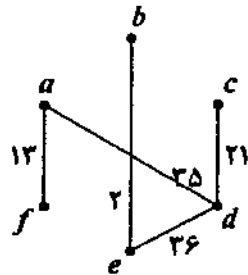
بنابراین بین هر دو رأس دلخواه  $G$ ، مانند  $a, b$  مسیری از  $a$  به  $b$  و مسیری از  $b$  به  $a$  وجود دارد. لذا  $G$  قویاً همبند است.

۲۳- با استفاده از الگوریتم‌های کراسکال و پریم یک درخت پوشای مینیم برای گراف زیر به دست آورید.

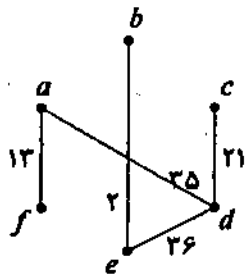


پاسخ :

الگوریتم کراسکال :



الگوریتم پریم :



مقدار مینیمال : ۱۰۷