

حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

کرداورنده:

Pnu-Soal.ir


فصل پنجم

تمرینات فصل ۵

در تمرینهای ۱ الی ۸، ۴ جمله اول دنباله‌های ارائه شده را به دست آورید.

-۱

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + n, & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

پاسخ: 

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2(1) + 2 = 4$$

$$a_3 = 2(4) + 3 = 11$$

$$a_4 = 2(11) + 4 = 26$$

-۲

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2n, & n \geq 2 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

پاسخ: 

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 2 + 2(2) = 6$$

$$b_3 = 6 + 2(3) = 12$$

$$b_4 = 12 + 2(4) = 20$$

$$\begin{cases} c_n = n(c_{n-1})^2, n \geq 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

پاسخ: \Rightarrow

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = 1(2)^2 = 4$$

$$c_3 = 2(4)^2 = 32$$

$$c_4 = 3(32)^2 = 3072$$

-۴

$$\begin{cases} b_n = n(b_{n-1})^2, n \geq 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

پاسخ: \Rightarrow

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1(1)^2 = 1$$

$$b_3 = 2(1)^2 = 2$$

$$b_4 = 3(2)^2 = 12$$

-۵

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

پاسخ: \Rightarrow

$$a_1 = 1$$


$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 1 + 2(1) = 3$$

$$a_4 = 3 + 2(1) = 5$$

-۶

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}, & n \geq 2 \\ b_2 = -1, & b_1 = 1 \end{cases}$$

پاسخ: 

$$b_2 = -1$$


$$b_1 = 1$$

$$b_3 = 1 + 2(-1) = -1$$

$$b_4 = -1 + 2(1) = 1$$

-۷

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} - a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_2 = 1, & a_1 = 1 \end{cases}$$

پاسخ: 

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_3 = 3(1) - 1 = 2$$

$$a_4 = 4(2) - 1 = 7$$

-۸

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, & n \geq 2 \\ a_2 = 1, & a_1 = 2 \end{cases}$$

پاسخ: 

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_3 = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$a_4 = 4 + 2 + 1 = 7$$

♦ در تمرین‌های ۹ الی ۱۱، نشان دهید که دنباله تعریف شده در قسمت (الف) در رابطه بازگشتی ارائه شده در قسمت (ب) صدق می‌کند.

$$9\text{-الف)} \quad n \geq 0, \quad 1, 3, 7, \dots, 2^n - 1$$

$$\text{ب)} \quad a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

پاسخ:

در دنباله تعریف شده داریم: $a_n = 2^n - 1$ ، از طرفی

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2 \times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} - 1) + 1 \\ &= 2(2^{n-1} - 1) + 1 \end{aligned}$$

پس

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$10\text{-الف)} \quad n \geq 0, \quad 2, 3, 4, 5, \dots, 2+n$$

$$\text{ب)} \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

پاسخ:

در دنباله تعریف شده داریم: $a_n = 2 + n$ ، از طرفی

$$2(2+n-1) - (2+n-2) = 4 + 2n - 2 - n = 2 + n$$

پس

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$11\text{-الف)} \quad (\text{اعداد کاتالان}) \quad n \geq 0, \quad \frac{1}{n+1} C_{2n}^n, \quad 1, 1, 2, 5, 14, \dots$$

$$\text{ب)} \quad b_n = \frac{4n-2}{n+1} b_{n-1}, \quad n \geq 2$$

پاسخ:

در دنباله تعریف شده داریم: $b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ ، از طرفی

$$\begin{aligned} \frac{4n-2}{n+1} b_{n-1} &= \frac{4n-2}{n+1} \left(\frac{1}{(n-1)+1} C_{2(n-1)}^{n-1} \right) \\ &= \frac{4n-2}{n+1} \left(\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4n-2}{n+1} \left(\frac{1}{n} \times \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \right) \\
&= \frac{4n-2}{n+1} \left(\frac{(2n)(2n-1)n}{(2n)(2n-1)n} \times \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!} \right) \\
&= \frac{4n-2}{n+1} \left(\frac{n}{(2n)(2n-1)} \times \frac{(2n)!}{n!n!} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{4n^2-2n}{4n^2-2n} \times \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} C_{2n}^n
\end{aligned}$$

پس

$$b_n = \frac{4n-2}{n+1} b_{n-1}$$

۱۲- فرض کنید که در برج هانوی به جای سه ستون، از چهار ستون استفاده کرده باشیم. مشابه مثال ۴-۵، در هر مرحله یک حلقه را می‌توان از یک ستون به ستون دیگر، به شرط آنکه بر روی حلقه کوچک‌تر قرار نگیرد، منتقل کرد. فرض کنید که s_n حداقل تعداد جابه‌جایی‌های لازم برای انتقال n حلقه از ستون چپ به ستون راست باشد.

الف) s_1, s_2, s_3 را به دست آورید.

ب) نشان دهید که به ازای هر $n \geq 3$ ، $s_n \leq 2s_{n-2} + 3$.

👉 پاسخ :

الف) برای انتقال ۱ حلقه روشن است تنها یک حرکت لازم است. پس $s_1 = 1$

برای انتقال ۲ حلقه، ابتدا حلقه اول را به ستون B ، سپس حلقه زیر را به D منتقل

می‌کنیم و در نهایت حلقه B را به D منتقل می‌کنیم. پس $s_2 = 3$

برای انتقال ۳ حلقه، حلقه بالایی را به ستون B ، حلقه وسط را به ستون C و حلقه

زیر را به ستون D منتقل کرده سپس حلقه C را به D و پس از آن حلقه B را به D

منتقل می‌کنیم. پس $s_3 = 5$

ب) فرض کنیم چهار ستون A و B و C و D داریم. برای انتقال n حلقه از حلقه A به

حلقه D ، ابتدا فرض کنیم $(n-2)$ حلقه را از A به B با s_{n-2} حرکت انتقال

داده‌ایم. ۲ حلقه باقیمانده در ستون A را با سه حرکت به ستون D منتقل می‌کنیم در

نهایت $(n-2)$ حلقه موجود در B را به روی دو حلقه موجود در D با s_{n-2} حرکت انتقال می‌دهیم. بنابراین

$$s_n = s_{n-2} + 2 + s_{n-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_n = 2s_{n-2} + 2 \\ s_1 = 1, s_2 = 2 \end{cases}$$

۱۳- نشان دهید که عناصر رشته فیبوناچی در روابط زیر صادق هستند:

$$n \geq 1, \quad F_n^2 - F_{n-1}^2 = F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1} \quad (\text{الف})$$

$$n \geq 1, \quad F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2F_n F_{n-1} \quad (\text{ب})$$

$$n \geq 1, \quad F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1} + F_n + 2 \quad (\text{ج})$$

$$n \geq 0, \quad F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n \quad (\text{د})$$

پاسخ:

الف) داریم:

$$F_n^2 - F_{n-1}^2 = (F_n - F_{n-1})(F_n + F_{n-1}) = (F_n - F_{n-1})(F_{n+1})$$

$$= F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1}$$

ب) داریم:

$$F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2$$

$$\Rightarrow F_{n+1}^2 = F_n^2 + 2F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2$$

$$\Rightarrow F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2F_n F_{n-1}$$

ج) رابطه اخیر صحیح نمی‌باشد. زیرا، با فرض $n=3$ باید داشته باشیم:

$$F_4^2 - F_3^2 = F_2 + F_3 + 2$$

$$\Rightarrow 25 - 9 = 2 + 3 + 2 \Rightarrow 16 = 7$$

که این یک تناقض است.

۱۴- مطلوب است $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ (فرض کنید که حد موجود است) که در آن F_n رشته فیبوناچی است.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{فرض کنیم } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L, \text{ در این صورت } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = L \text{ بنابراین} \\ L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) \\ = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{L} \end{aligned}$$

پس $L = 1 + \frac{1}{L}$ ، لذا

$$\begin{aligned} L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \text{اما، همواره داریم } \frac{F_{n+1}}{F_n} \geq 1 \text{، پس } L \geq 1 \text{، در نتیجه } L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ قابل قبول است.} \\ \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \right) \text{ (تذکر:)} \end{aligned}$$

۱۵- یک جفت خرگوش (نر و ماده) در ابتدای سال متولد شده‌اند. شرایط زیر را در نظر بگیرید.
۱. جفت خرگوش‌ها در ماه اول تولدشان تولیدمثل نمی‌کنند، اما در انتهای هر ماه دیگری غیر از ماه اول، چهار جفت (نر و ماده) خرگوش به دنیا می‌آورند.
۲. هیچ خرگوشی نمی‌میرد.

الف) فرض کنید که r_n برابر با تعداد جفت خرگوش‌های موجود در انتهای ماه n ، $n \geq 1$ ، باشد. بدیهی است که $r_1 = 1$ یک رابطه بازگشتی برای r_1, r_2, r_3, \dots پیدا کنید.
ب) r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 را به دست آورید.
ج) تعداد خرگوش‌های موجود در انتهای سال را به دست آورید.

پاسخ:

الف) تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام برابر است با r_{n-2} (به توضیحات مثال ۵-۵ مراجعه کنید.) زیرا در انتهای ماه n - ام جفت خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه $(n-1)$ - ام هنوز تولیدمثل نکرده‌اند. بنابراین، تنها جفت خرگوش‌های موجود در انتهای ماه $(n-2)$ - ام هستند که تولیدمثل می‌کنند. چون هر

جفت خرگوش چهار جفت خرگوش به دنیا می‌آورد بنابراین تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام برابر $4r_{n-2}$ می‌باشد.

در نتیجه، تعداد کل خرگوش‌ها در انتهای ماه n - ام، برابر است با تعداد کل خرگوش‌ها در انتهای ماه $(n-1)$ ام به اضافه تعداد خرگوش‌های متولد شده در انتهای ماه n - ام. پس

$$\begin{cases} r_n = 4r_{n-2} + r_{n-1} & n \geq 2 \\ r_0 = 1, r_1 = 1 \end{cases}$$

(ب) با توجه به رابطه بدست آمده در (الف) داریم:

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = 5$$

$$r_3 = 9$$

$$r_4 = 29$$

$$r_5 = 65$$

$$r_6 = 181$$

(ج) برای بدست آوردن تعداد خرگوش‌ها در انتهای سال می‌توان اعداد بالا را تا r_{12} لیست کرد. که در این صورت r_{12} جواب مساله است. همچنین می‌توان رابطه بازگشتی داده شده را حل کرد.

با لیست کردن اعداد دنباله داریم:

$$a_0 = 441$$

$$a_1 = 1165$$

$$a_2 = 2929$$

$$a_3 = 7589$$

$$a_4 = 19305$$

$$a_5 = 49661$$

۱۶- الف) فهرستی از اعداد دودویی صفر، یک، دو، سه و چهار رقمی که شغل ۱۱۱ نیستند را ارائه دهید.

(ب) برای $n \geq 0$ ، فرض کنید که d_n برابر با تعداد اعداد دودویی n رقمی باشند که شامل ۱۱۱ نیستند. d_0 ، d_1 ، d_2 و d_3 را به دست آورید.

(ج) یک رابطه بازگشتی برای دنباله d_0 ، d_1 ، d_2 ، ... ارائه دهید.

(د) با استفاده از نتایج حاصل از قسمت‌های (ب) و (ج) d_8 را به دست آورید.

☞ پاسخ :

(الف)

صفر رقمی : ϕ

یک رقمی : ۱۰۰

دو رقمی : ۱۱ ، ۱۰ ، ۰۱ ، ۰۰

سه رقمی : ۱۱۰ ، ۱۰۱ ، ۱۰۰ ، ۰۱۱ ، ۰۱۰ ، ۰۰۱ ، ۰۰۰

چهار رقمی : ۱۱۰۱ ، ۱۰۱۰ ، ۱۰۰۱ ، ۱۰۰۰ ، ۰۱۱۰ ، ۰۱۰۱ ، ۰۰۱۰ ، ۰۰۱۱ ، ۰۰۰۱ ، ۰۰۰۰ ، ۰۰۰۱ ، ۰۰۱۰ ، ۰۰۱۱ ، ۰۱۰۱ ، ۰۱۰۰ ، ۰۱۰۱ ، ۰۱۰۱

۱۱۰۱ ، ۱۱۰۰

(ب) $d_4 = 13$, $d_3 = 7$, $d_2 = 4$, $d_1 = 2$, $d_0 = 0$

(ج) فرض کنیم به نوعی تعداد همه اعداد دودویی که شامل ۱۱۱ نیستند را می‌دانیم .

یک عدد n رقمی دودویی را در نظر می‌گیریم . اگر اولین رقم این عدد صفر باشد ،

آنگاه بقیه ارقام می‌توانند هر دنباله‌ای از صفر و یک باشد مشروط بر اینکه شامل ۱۱۱

نباشند . برای این حالت d_{n-1} عدد وجود دارد .

حال تعداد اعداد $(n-1)$ رقمی دودویی که دو رقم اولشان ۱۱ است و شامل ۱۱۱

نمی‌باشند را می‌شماریم . با توجه به فرض مساله چون دو رقم اول عدد $(n-1)$ رقمی

۱۱ است ، پس رقم سوم این عدد باید صفر باشد و بقیه اعداد می‌توانند هر دنباله‌ای از

صفر و یک باشند ، مشروط بر اینکه شامل ۱۱۱ نباشند . این اعداد به صورت زیر

هستند :

$$\overbrace{110 \dots}^{n-1} \underbrace{\quad}_{n-2}$$

بنابراین تعداد d_{n-1} تا از این اعداد داریم .

حال به مساله اصلی برمی‌گردیم . فرض کنیم اولین عدد ، عدد n رقمی مفروض ۱

است . در این صورت دورقمی بعدی نباید ۱۱ باشد . بنابراین برای این حالت

$d_{n-1} - d_{n-2}$ عدد خواهیم داشت .

در نتیجه :

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-1} - d_{n-2}$$

یا

$$\begin{cases} d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \\ d_1 = 2 , d_2 = 4 , d_3 = 7 , d_4 = 13 \end{cases}$$

(د) داریم:

$$S_r = 2(22) + 2(8) = 60$$

۱۸- پلکانی با n پله مفروض است. برای بالا رفتن از این پلکان، در هر مرحله یا یک پله بالا می‌رویم، یا دو پله و یا تلفیقی از این دو. برای $n \geq 1$ ، فرض کنید که a_n برابر تعداد حالت‌هایی باشد که می‌توان از این پلکان به طریقه گفته شده بالا رفت. یک رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورید.

☞ پاسخ:

برای رفتن به پله اول فقط یک حالت وجود دارد. پس $a_1 = 1$. برای رفتن به پله دوم دو حالت وجود دارد. به طوری که می‌توان دو پله را یکجا رفت یا اینکه پله‌ها را یکی یکی بالا رفت. بنابراین $a_2 = 2$. حال فرض کنیم به پله n ام رسیده‌ایم. برای رسیدن به این پله، دو راه بیشتر نداریم. یا اینکه از پله $(n-2)$ ام با پیمودن دو پله در یکجا به پله n ام رسیده‌ایم و یا از پله $(n-1)$ ام با پیمودن یک پله. به پله n ام رسیده‌ایم. پس دنباله بازگشتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

۱۹- فرض کنید که P_n تعداد افرازهایی یک مجموعه n عنصری باشد نشان دهید که:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k P_{n-k-1}, \quad n \geq 1$$

☞ پاسخ:

گیریم $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه n عنصری باشد. فرض می‌کنیم به نوعی تعداد همه افرازهایی مجموعه‌ها تا n عضوی را می‌دانیم. عنصر x_n از X را در نظر می‌گیریم. برای مجموعه همه افرازهایی X حالت‌های زیر پیش می‌آید:

(۱) $\{x_n\}$ به عنوان یک مجموعه تک عضوی در افرازه‌ها ظاهر می‌شود. در این صورت تعداد افرازه‌ها، برابر با تعداد افرازه‌های مجموعه $n-1$ عضوی خواهد بود که برابر است با P_{n-1} . از آنجایی که $C_{n-1}^0 = 1$ تعداد همه افرازه‌ها در این حالت $C_{n-1}^0 P_{n-1} = P_{n-1}$ است.

(۲) x_n در یک مجموعه مانند $\{x_i, x_n\}$ در همه افرازه‌ها ظاهر می‌شود. در این حالت C_{n-1}^1 راه برای انتخاب x_i از میان $n-1$ عنصر $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ وجود دارد. از طرفی تعداد افرازهایی که شامل $\{x_i, x_n\}$ است برابر است با P_{n-2} .

بنابراین تعداد کل افرازاها برای این حالت برابر است با :

$$C_{n-1}^1 P_{n-1}$$

:

x_{n-k+1} در یک مجموعه $k+1$ عنصری از عناصر X ظاهر می‌شود. برای انتخاب k عنصر از مجموعه $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ که با x_n مجموعه $k+1$ عنصری را تشکیل می‌دهند C_{n-1}^k راه وجود دارد. از $n-k-1$ عنصر باقیمانده به تعداد P_{n-k-1} افراز دارند. بنابراین تعداد کل حالت‌ها در این مرحله نیز برابر است با :

$$C_{n-1}^k P_{n-k-1}$$

:

بنابراین تعداد تمام افرازاها برای یک مجموعه n عنصری برابر است با :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k P_{n-k-1}$$

۲۰- حاصل ضرب $x_1 x_2 x_3$ را می‌توان به دو صورت $(x_1 x_2) x_3$ و یا $x_1 (x_2 x_3)$ انجام داد. (پارانتزبندی کرد). به طریق مشابه حاصل ضرب $x_1 x_2 x_3 x_4$ را به صورت گوناگون می‌توان انجام داد که دو نمونه آن عبارت‌اند از : $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$ و $x_1((x_2 x_3) x_4)$. فرض کنید که P_n تعداد حالت‌هایی است که حاصل ضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ را می‌توان انجام داد. نشان دهید که $P_1 = 1$ و

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}, \quad n \geq 2$$

پاسخ :

حاصل ضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ را در نظر بگیرید. از پارانتزبندی‌های بیجا خودداری می‌کنیم. به عنوان مثال $(x_1 x_2)$ را با $((x_1 x_2))$ یکی می‌گیریم. فرض کنیم همه پارانتزبندی‌ها تا $n-1$ را می‌دانیم. برای پارانتزبندی $x_1 x_2 \dots x_n$ حالت‌های زیر پیش می‌آید :

(۱) x_1 در یک گروه و $x_2 \dots x_n$ در گروه بعد پارانتزبندی شود. مثلاً

$$x_1 (x_2 x_3) (x_4 \dots x_n)$$

برای این نوع $P_1 P_{n-1}$ حالت وجود دارد.

(۲) $x_1 x_2$ در یک گروه و $x_3 \dots x_n$ در گروه بعد پارانتزبندی شود. مثلاً

$$(x_1 x_2) (x_3 \dots x_n)$$

برای این حالت $P_2 P_{n-2}$ حالت وجود دارد.

:

(k) در یک گروه و $x_{k+1} \dots x_n$ در گروه بعد پارانتر بندی شود. مثلاً

$$\underbrace{x_1(x_2x_3)x_4 \dots x_k}_{\text{گروه اول}} \underbrace{x_{k+1}(x_{k+2}x_{k+3})x_{k+4} \dots x_n}_{\text{گروه دوم}}$$

برای این حالت نیز $P_k P_{n-k}$ حالت وجود دارد. زیرا P_k ، حالت برای پارانتر بندی گروه اول و P_{n-k} حالت برای پارانتر بندی گروه دوم وجود دارد. بنابراین در مجموع $P_k P_{n-k}$ حالت برای این نوع پارانتر بندی وجود دارد.

در نهایت با جمع بندی انواع حالت ها، تعداد کل حالت ها به صورت زیر به دست می آید

$$P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k}$$

۲۱- جواب عمومی هر کدام از روابط بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0, & n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \begin{cases} 4a_n - 5a_{n-1} = 0, & n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} 2a_{n+1} - 4a_n = 0, & n \geq 0 \\ a_1 = 5 \end{cases} \quad \text{د)} \quad \begin{cases} 2a_n - 2a_{n-1} = 0, & n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

پاسخ :

الف) معادله مشخصه برای رابطه داده شده $4r - 5 = 0$ است. پس $r = \frac{5}{4}$. بنابراین

جواب عمومی به صورت $a_n = c\left(\frac{5}{4}\right)^n$ است. با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی نتیجه می شود که :

$$a_1 = c = 1$$

پس جواب عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است :

$$a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

ب) معادله مشخصه عبارت مزبور به صورت $r - \frac{3}{2} = 0$ است. پس $r = \frac{3}{2}$. بنابراین

جواب عمومی به صورت $a_n = c\left(\frac{3}{2}\right)^n$ است. با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده نتیجه می شود که :

$$a_1 = c = 2$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

(ج) معادله مشخصه عبارت داده شده به صورت $2r - 3 = 0$ است . پس $r = \frac{3}{2}$ و

جواب عمومی رابطه داده شده به صورت $a_n = c\left(\frac{3}{2}\right)^n$ است . با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی نتیجه می شود که :

$$a_1 = c\left(\frac{3}{2}\right)^1 \Rightarrow c = \frac{8}{\left(\frac{3}{2}\right)^1} = 16$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = 16\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

(د) معادله مشخصه برای عبارت مزبور $3r - 4 = 0$ است . پس $r = \frac{4}{3}$ و جواب عمومی

به صورت $a_n = c\left(\frac{4}{3}\right)^n$ می باشد . با قرار دادن رابطه اخیر در شرایط مرزی به دست می آوریم :

$$a_1 = \frac{4}{3}c = 5 \Rightarrow c = \frac{15}{4}$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = \frac{15}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

۲۲-۱اگر

$$\begin{cases} a_n^r = 7a_{n-1}^r, & n \geq 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

a_1 را به دست آورید .

پاسخ :

داریم :

$$a_n^r = 7a_{n-1}^r = 7(7a_{n-2}^r) = 7^2 a_{n-2}^r = 7^2 (7a_{n-3}^r) = 7^3 a_{n-3}^r = \dots = 7^n a_1^r$$

با جاگذاری $a_1 = 3$ بدست می آوریم :

$$a_n^r = 3^r \times 7^n$$

یا

$$a_n = 3(7)^{\frac{n}{r}}$$

پس

$$a_1 = 3(7)^{\frac{1}{r}} \approx 1968$$

۲۲- جواب رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} a_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1} & , \quad n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

را به دست آورید.

پاسخ :

با استفاده از جاگذاری ، جواب رابطه داده شده را به دست می آوریم :

$$a_n = 2a_{n-1} - 2na_{n-1} = 2(1-n)a_{n-1}$$

$$a_2 = -2a_1$$

$$a_3 = -2a_2 = 4 \times 2 \times a_1 = 2(2 \times 1 \times a_1) = 2 \times 2!$$

$$a_4 = -6a_3 = -6 \times 4 \times 2 \times a_1 = -2(3 \times 2 \times 1)a_1 = -2 \times 3!$$

⋮

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1 \times a_1 = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

۲۴- x_1, x_2, \dots, x_r ، فهرستی از اعداد حقیقی و متمایز است که باید توسط روش

مرتب سازی حبابی ، به صورت صعودی مرتب شوند.

الف) بعد از انجام چند مقایسه ، اولین ده عدد کوچک تر به صورت صعودی مرتب خواهند شد؟

ب) چند مقایسه برای مرتب سازی ، همه این اعداد لازم است ؟

پاسخ :

الف) با توجه به مثال ۵-۲) برای اولین عدد (۱-۲) مقایسه ، برای دومین عدد (۲-۲۰)

و ... برای دهمین عدد (۱۰-۲۰) مقایسه لازم است . بنابراین تعداد مقایسه برای مرتب

کردن اولین ده عدد برابر است با :

$$(20-1) + (20-2) + \dots + (20-10) = 10 \times 20 - \frac{10(11)}{2} = 145$$

(ب) با توجه به مثال ۵-۱۲ تعداد کل مقایسه برای مرتب‌سازی اعداد برابر است با:

$$a_r = \frac{20(20-1)}{2} = 190$$

۲۵- روابط بازگشتی زیر را حل کنید (جوابهای عمومی نباید شامل اعداد موهومی باشند).

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} 2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, n \geq 0 \\ a_1 = 2, a_2 = -8 \end{array} \right. & \text{(ب)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 3 \end{array} \right. & \text{(الف)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{n+2} + a_n = 0, n \geq 0 \\ a_1 = 0, a_2 = 3 \end{array} \right. & \text{(د)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, n \geq 1 \\ a_1 = 7, a_2 = 3 \end{array} \right. & \text{(ج)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_1 = 5, a_2 = 12 \end{array} \right. & \text{(و)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+2} + 4a_n = 0, n \geq 0 \\ a_1 = a_2 = 1 \end{array} \right. & \text{(ه)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, n \geq 2 \\ a_1 = 3, a_2 = 15 \end{array} \right. & \text{(ح)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_1 = 1, a_2 = 3 \end{array} \right. & \text{(ز)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_n = 2a_{n-2} + 2a_{n-3}, n \geq 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7 \end{array} \right. & \text{(ی)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 9a_{n+2} + 12a_{n+1} + 4a_n = 0, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 4 \end{array} \right. & \text{(ط)}$$

پاسخ:

الف) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 - 5r - 6r = 0$ است. پس $r = 6$ و $r = -1$ بنابراین جواب عمومی به صورت $a_n = c_1(-1)^n + c_2(6)^n$ است. با جاگذاری جواب عمومی در شرایط مرزی داده شده بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_2 = -c_1 + 6c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{7}, c_2 = \frac{5}{7}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2}{7}(-1)^n + \frac{5}{7}(6)^n$$

ب) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $2r^2 - 11r + 5 = 0$ است. پس $r = \frac{1}{2}$ و $r = 5$ بنابراین جمله عمومی به صورت $a_n = c_1(5)^n + c_2(\frac{1}{2})^n$ است.

با جاگذاری جواب اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 = 2 \\ a_2 = 5c_1 + \frac{1}{2}c_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -2, c_2 = 4$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = -2(\frac{1}{3})^n + 4(\frac{1}{3})^n$$

ج) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $3r^2 - 2r - 1 = 0$ است . پس $r = -\frac{1}{3}$

و $r_1 = 1$ پس جواب عمومی به صورت $a_n = c_1(1)^n + c_2(-\frac{1}{3})^n$ خواهد بود. با جاگذاری

رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می آوریم :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 7 \\ c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 4, c_2 = 3$$

بنابراین جواب عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است :

$$a_n = 4 + 3(-\frac{1}{3})^n$$

د) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 + 1 = 0$ است . پس $r_1 = i, r_2 = -i$

یعنی $r_1 = i \sin \frac{\pi}{2}, r_2 = i \sin \frac{-\pi}{2}$. بنابراین جواب عمومی دنباله به صورت

$$a_n = c_1(i \sin \frac{\pi}{2})^n + c_2(i \sin \frac{-\pi}{2})^n$$

$$= c_1 i \sin \frac{n\pi}{2} - c_2 i \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= k_1 \sin \frac{n\pi}{2}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می آوریم :

$$a_1 = k_1 = 3$$

پس جمله عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = 3 \sin \frac{n\pi}{2}$$

هـ) رابطه داده شده را با جاگذاری حل می‌کنیم. داریم:

$$a_r = -4a_s = -4$$

$$a_r = -4a_1 = -4$$

$$a_r = -4a_r = -4(-4) = (-1)^r 4^r$$

$$a_8 = -4a_r = -4(-4) = (-1)^r 4^r$$

$$a_r = -4a_r = -4((-1)^r 4^r) = (-1)^r 4^r$$

$$a_y = -4a_8 = -4((-1)^r 4^r) = (-1)^r 4^r$$

⋮

$$a_{rk} = (-1)^k 4^k$$

$$a_{rk+1} = (-1)^k 4^k$$

⋮

$$a_n = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor} 4^{\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor}$$

و) معادله مشخصه رابطه مزبور به صورت $r^2 - 6r + 9 = 0$ است. پس $r_1 = r_2 = 3$ بنابراین جواب عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = (c_1 + nc_2)3^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 = 5 \\ a_1 = 3(c_1 + c_2) = 12 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 5, c_2 = -1$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی‌آید:

$$a_n = (5 - n)3^n$$

ز) معادله مشخصه رابطه داده شده به صورت $r^2 + 2r + 2 = 0$ است. پس

$$r_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), r_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{2})^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n \right] \\ &= (\sqrt{2})^n \left[k_1 \cos \frac{n\pi}{4} + k_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1 = 1 \\ a_1 &= \sqrt{2} \left(k_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2 \end{aligned}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی آید :

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left[\cos \frac{n\pi}{4} + 2 \sin \frac{n\pi}{4} \right]$$

(ح) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $r^2 - 7r + 10 = 0$ است. پس $r_1 = 5$ و $r_2 = 2$.
لذا جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_n = c_1(2)^n + c_2(5)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می آوریم :

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 = 2 \\ a_2 = 2c_1 + 5c_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 2$$

پس جواب عمومی دنباله به صورت زیر درمی آید :

$$a_n = 2(5)^n$$

(ط) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $9r^2 + 12r + 4 = 0$ است. پس $r_1 = r_2 = -\frac{2}{3}$.
بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$a_n = (c_1 + nc_2) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی داده شده بدست می آوریم :

$$\begin{cases} a_1 = c_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{2}{3}c_1 - \frac{2}{3}c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -7$$

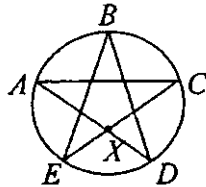
بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر درمی آید :

$$a_n = (1 - 7n) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

(ی) چند جمله مشخصه دنباله به صورت $r^2 - r - 1 = 0$ است. معادله فوق دارای یک ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط است. بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = c_1 r^n + c_2(a + ib)^n + c_3(a - ib)^n$$

ج) نشان دهید که $\frac{AC}{AX} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



پاسخ:

الف) این مطلب را در تمرین ۱۴ ثابت کرده ایم.

۲۹- فرض کنید که $a_n, n \geq 0$ ، تعداد رشته‌های تشکیل شده از ۱ و ۲ باشد که مجموع عناصر آن مساوی n است. برای مثال $a_3 = 3$. زیرا مجموع عناصر هر کدام از سه رشته زیر مساوی ۳ است:

الف) ۱, ۱, ۱ ب) ۲, ۱ ج) ۱, ۲

یک رابطه بازگشتی برای a_n ارائه داده و آن را حل کنید.

پاسخ:

مجموعه تمام رشته‌هایی که از ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند و مجموع آنها برابر n است را در نظر بگیرید. اولین عنصر از این دنباله را در نظر بگیرید. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) عنصر مورد نظر برابر ۱ باشد. در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر که از ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند باید برابر $n-1$ باشد. در این حالت با a_{n-1} حالت روبرو می‌شویم.

(۲) عنصر مورد نظر ۲ باشد. در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر که از ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند باید برابر $n-2$ باشد. در این حالت نیز با a_{n-2} حالت سروکار داریم. بنابراین

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

برای حل دنباله، روشن است چند جمله‌ای مشخصه دنباله به صورت $r^2 - r - 1 = 0$

می‌باشد. پس $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. در نتیجه جواب عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ a_2 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 \equiv -0.7236 \quad , \quad c_2 \equiv 0.2764$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر درمی آید :

$$a_n = -0.7236 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + 0.2764 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

۳۰- فرض کنید که a_n ، $n \geq 1$ ، تمناذ حالت‌هایی باشد که عدد n را بتوان به صورت مجموع اعداد صحیح و مثبت مرتب شده، که مقدار هر کدام از جمعوندها حداقل مساوی ۲ است، نوشت. برای مثال، $a_3 = 3$ ، زیرا، عدد ۵ را می‌توان به صورت مجموع‌های مرتب شده ۵، ۲+۳ و ۳+۲ نوشت. یک رابطه بازگشتی برای a_n پیدا کرده و آن را حل کنید.

پاسخ :

مجموعه تمام دنباله‌هایی که عناصرشان حداقل ۲ و مجموع‌شان n می‌باشد را در نظر می‌گیریم. برای اولین عنصر این دنباله حالت‌های زیر می‌تواند اتفاق بیفتد.

- اولین عنصر ۲ باشد. در این صورت حاصل جمع بقیه عناصر باید $n-2$ باشد به شرطی که فرض مساله رعایت شود. در این صورت a_{n-2} حالت داریم.
- اولین عنصر ۳ باشد. در این حالت حاصل جمع بقیه عناصر باید $n-3$ باشد مشروط بر اینکه فرض مساله رعایت شود. در این صورت a_{n-3} حالت داریم.

⋮

- اولین عنصر $n-2$ عدد باشد. در این صورت بنا به فرض مساله عدد بعدی باید ۲ باشد.
- اولین عنصر n باشد.

تذکر: اولین عنصر نمی‌تواند $n-1$ باشد. زیرا در این صورت عنصر بعدی باید عدد ۱ باشد که متناقض با فرض مساله است.

در نتیجه با توجه به حالت‌های فوق خواهیم داشت :

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + 1$$

بنابراین رابطه بازگشتی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_n = \sum_{i=1}^{n-2} a_i & n \geq 4 \\ a_2 = 1, \quad a_3 = 1 \end{cases}$$

۳۱- فرض کنید که D_n ، $n \geq 1$ ، دترمینان تعریف شده در زیر باشد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

یک رابطه بازگشتی برای D_n پیدا کرده و آن را حل کنید.

پاسخ :

با بسط حول سطر اول داریم :

این دترمینال ایراد دارد!

$$D_n = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

دترمینال دوم را حول ستون اول بسط می دهیم در این صورت رابطه زیر به دست می آید :

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

همچنین داریم :

$$D_1 = |2| = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

پس رابطه بازگشتی زیر به دست می آید :

$$\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} \\ D_1 = 2, \quad D_2 = 3 \end{cases}$$

چند جمله مشخصه این رابطه به صورت $r^2 - 2r + 1 = 0$ است . پس $r_1 = r_2 = 1$ لذا جواب عمومی رابطه ، به صورت زیر می باشد .

$$D_n = (c_1 + nc_2)(1)^n$$

با جاگذاری رابطه اخیر در شرایط مرزی بدست می آوریم :

$$\begin{cases} D_1 = c_1 + c_r = 2 \\ D_r = c_1 + 2c_r = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_r = 1$$

بنابراین ، جواب عمومی رابطه مورد بحث به صورت زیر درمی آید :

$$D_n = 1 + n$$

۳۲- رابطه بازگشتی

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad n \geq 0 \\ a_0 = 4, a_1 = 13 \end{cases}$$

را حل کنید .

پاسخ :

فرض کنیم $d_n = a_n^T$. در این صورت ، رابطه مورد بحث به صورت زیر درمی آید :

$$\begin{cases} d_{n+2} - 5d_{n+1} + 4d_n = 0 \\ d_0 = 16, \quad d_1 = 169 \end{cases}$$

ریشه های معادله مشخصه $r^2 - 5r + 4 = 0$ ، عبارتند از $r_1 = 1$ ، $r_2 = 4$. بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر است :

$$d_n = c_1(1)^n + c_2(4)^n$$

با جاگذاری جمله در شرایط مرزی بدست می آوریم :

$$\begin{cases} d_0 = c_1 + c_2 = 16 \\ d_1 = c_1 + 4c_2 = 169 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -35, \quad c_2 = 51$$

$$d_n = -35 + 51(4)^n$$

درنتیجه با جاگذاری $a_n^T = d_n$ جمله عمومی رابطه اصلی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n^T = -35 + 51(4)^n$$

۳۳- اگر $a_n = c_1 + c_2 7^n$ ، $n \geq 0$ ، جواب عمومی رابطه بازگشتی $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0$ ، $n \geq 0$ ، باشد ضرایب b و c را پیدا کنید .

پاسخ :

با جاگذاری a_n در جمله عمومی داده شده بدست می آوریم :

$$(c_1 + c_2 7^{n+2}) + b(c_1 + c_2 7^{n+1}) + c(c_1 + c_2 7^n) = 0$$

$$\Rightarrow c_1(1+b+c) + 7^n c_2(49+7b+c) = 0$$

یک جواب برای c, b از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 49+7b+c=0 \end{cases} \Rightarrow b=-8, c=7$$

۳۴- نشان دهید که هر دو عدد متوالی از رشته فیبوناچی نسبت به هم اول‌اند.

☞ پاسخ:

حکم را به استقرای قوی ثابت می‌کنیم.

۱. مبنای استقرا. روشن است

$$(F_0, F_1) = 1$$

۲. فرض استقرای قوی. فرض کنیم بازای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم:

$$(F_k, F_{k-1}) = 1$$

۳. مرحله استقرا. برای $n=k+1$ به روش برهان خلف، ثابت می‌کنیم که $(F_{k+1}, F_k) = 1$

فرض کنیم $d > 1$ ، $d | F_k$ و $d | F_{k+1}$ در این صورت با توجه به اینکه

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

داریم $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ ، از اینکه $d | F_k$ و $d | F_{k+1}$ پس $d | F_{k-1}$.

در نتیجه $d > 1$ و $(F_k, F_{k-1}) \geq d$ و این متناقض با فرض استقرای قوی است. پس

$$(F_{k+1}, F_k) = 1 \text{ و حکم اثبات می‌شود.}$$

۳۵- الگوریتمی ارائه دهید تا مشخص کند که آیا عدد مفروض $n \geq 0$ ، یک عدد فیبوناچی

است یا نه؟

☞ پاسخ:

یک روش ساده آنست که اعداد دنباله را تا اولین عدد بزرگتر یا مساوی عدد مفروض

محاسبه کنیم. حال می‌توان حکم کرد که عدد مورد نظر عنصری از دنباله فیبوناچی

است یا نه.

۳۶- روابط بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2n^2 - n, & n \geq 0 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2n + 3, & n \geq 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 2n^2, & n \geq 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 5, & n \geq 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

پاسخ :

الف) داریم :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 + 2 = 2 + 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 + 2 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 + 2 = 2 \times (2 + 1) + 2 \times 2 + 1$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 + 2 = 2 \times (2 + 2 + 1) + 2 \times 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2[(n-1) + \dots + 2 + 2 + 1] + 2n + 1$$

$$= n(n-1) + 2n + 1$$

$$= n(n-1+2) + 1 = n(n+2) + 1$$

ب) داریم :

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = a_0 = 2$$

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1^2 - 1 = 2 \times 1^2 - 1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2^2 - 2 = 2(1^2 + 2^2) - (1 + 2) + 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3^2 - 3 = 2(1^2 + 2^2 + 3^2) - (1 + 2 + 3) + 2$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] - [1 + 2 + \dots + (n-1)] + 2$$

$$= 2 \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} + 2$$

$$= \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + 2$$

$$= \frac{2n(n-1)^2}{2} + 2 = n(n-1)^2 + 2$$

ج) داریم:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2a_0 + 5 = 2 + 5$$

$$a_2 = 2a_1 + 5 = 2^2 + 2 \times 5 + 5$$

$$a_3 = 2a_2 + 5 = 2^3 + 2^2 \times 5 + 2 \times 5 + 5$$

⋮

$$a_n = 2^n + 5(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) \quad n \geq 1$$

د) داریم:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2a_0 + 2^0 = 2 + 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 2 = 2^2 + 2 + 2 = 2^2 + 2 \times 2$$

$$a_3 = 2a_2 + 2^2 = 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 2^3 + 3 \times 2^2$$

⋮

$$a_n = 2^n + n \times 2^{n-1}$$

۳۷- با استفاده از یک رابطه بازگشتی، مجموع $\sum_{i=1}^n i^r$ را حساب کنید.

پاسخ:

با فرض اینکه $a_n = \sum_{i=1}^n i^r$ داریم:

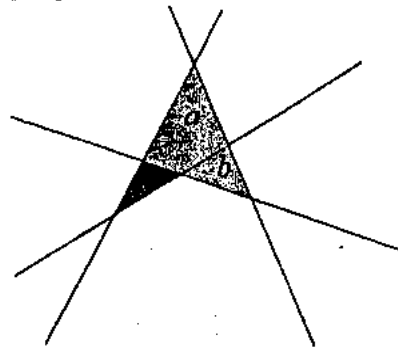
$$a_n = \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n^r$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + n^r$$

۳۸- n خط در صفحه به گونه‌ای ترسیم شده‌اند که اولاً دو به دو به دو متقاطع هستند و درثانی سه به سه در سه نقطه متمایز همدیگر را قطع می‌کنند (شکل زیر ، مسئله را برای $n=4$ خط ، نشان می‌دهد) .

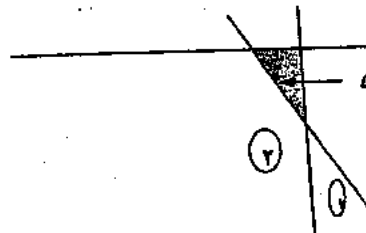
الف) با فرض آنکه a_n تعداد نواحی ایجاد شده توسط این خط باشد ، یک رابطه بازگشتی برای a_n پیدا کرده و آن را حل کنید .

ب) اگر b_n تعداد نواحی متناهی ایجاد شده توسط این خطوط باشد (مثل نواحی a ، b ، c در شکل زیر) ، یک رابطه بازگشتی برای b_n پیدا کرده و آن را حل کنید .



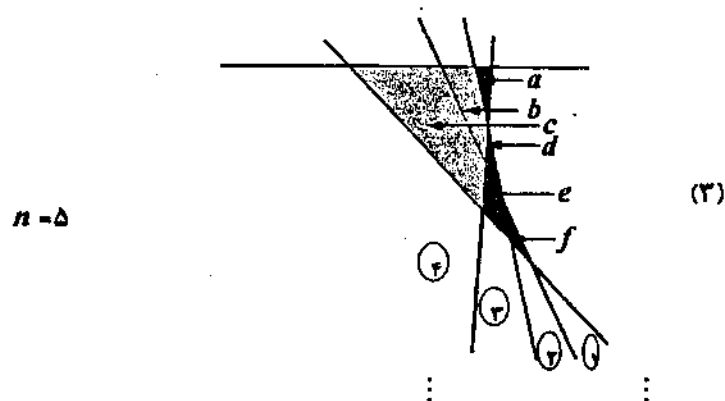
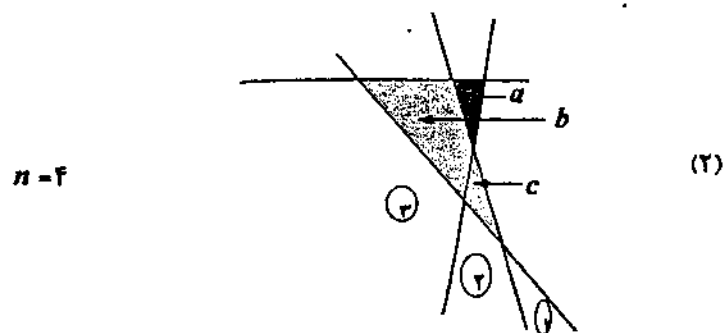
پاسخ :

الف و ب خطوط را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که شمارش ناحیه‌ها ساده باشد و در عین حال فرض مساله حفظ شود . برای این منظور فرض کنید خطوط را در هر مرحله به صورت زیر رسم می‌کنیم :



(۱)

$n=3$



با این روش، روشن است فرض مساله حفظ می شود. اگر در مرحله n -ام، b_n ناحیه داشته باشیم، آنگاه در مرحله $(n+1)$ -ام، $n-1$ ناحیه به ناحیه های قبلی اضافه می شود. لذا $n \geq 3$ $b_{n+1} = b_n + (n-1)$

از طرفی روشن است در مرحله $n+1$ -ام خطی که رسم می کنیم $n-1$ ناحیه ایجاد می کند. از آنجا که ترتیب رسم کردن خطها هیچ تاثیری در رسم ندارد. پس در مرحله $(n+1)$ -ام هر خط باعث ایجاد $(n-1)$ ناحیه می شود. در نتیجه

$$a_{n+1} = n-1 \quad n \geq 3$$

پس داریم:

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + (n-2) & n \geq 4 \\ b_4 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = n-2 \quad n \geq 3$$

۳۹- روابط بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = 3^n, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, & a_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = 7, & n \geq 0 \\ a_0 = 1, & a_1 = 2 \end{cases} \\ \text{ج)} \quad & \begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + 2a_n = n^2, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, & a_1 = 2 \end{cases} \quad \text{د)} \quad \begin{cases} a_{n+2} - a_n = \sin \frac{n\pi}{2}, & n \geq 0 \\ a_0 = 0, & a_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

پاسخ:

الف) ریشه های معادله $r^2 + 2r + 2 = 0$ عبارتند از $r = -1$ ، $r = -2$ ، بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n$ است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A3^n$ است. برای بدست آوردن ضریب A ، با جاگذاری $a_n^{(p)}$ در رابطه بازگشتی بدست می آوریم:

$$A3^{n+2} + 2A3^{n+1} + 2A3^n = 3^n$$

$$\Rightarrow 9A + 6A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{17}$$

بنابراین جمله عمومی رابطه داده شده به صورت زیر است:

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n + \frac{1}{17}3^n$$

حال با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{17} = 0 \\ a_1 = -c_1 - 2c_2 + \frac{2}{17} = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{25}{17}, \quad c_2 = \frac{-36}{17}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی آید:

$$a_n = \frac{25}{17}(-1)^n - \frac{36}{17}(-2)^n + \frac{1}{17}3^n$$

ب) ریشه معادله $r^2 + 2r + 2 = 0$ برابر است با $r_1 = r_2 = -1$ ، بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)} = (c_1 + nc_2)(-1)^n$ است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A$ است. با جاگذاری در رابطه مورد بحث بدست می آوریم:

$$A + 2A + 2A = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

بنابراین جواب عمومی رابطه مورد بحث عبارتست از:

$$a_n = (c_1 + nc_2)(-2)^n + \frac{7}{9}$$

حال با توجه به شرایط مرزی بدست می آوریم:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + \frac{7}{9} = 1 \\ a_1 = -2c_1 - 2c_2 + \frac{7}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{9}, c_2 = -\frac{5}{6}$$

پس جواب عمومی به صورت زیر درمی آید:

$$a_n = \left(\frac{2}{9} - \frac{5}{6}n\right)(-2)^n + \frac{7}{9}$$

ج) ریشه های معادله $r^2 + 4r + 4 = 0$ عبارتند از $r_1 = r_2 = -2$ بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)} = (c_1 + nc_2)(-2)^n$ است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = (A_0 + A_1n + A_2n^2)$ می باشد. با جاگذاری این عبارت در رابطه داده شده، داریم:

$$(A_0 + A_1(n+2) + A_2(n+2)^2) + 4(A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2) + 4(A_0 + A_1n + A_2n^2) = n^2$$

$$(9A_2)n^2 + (9A_1 + 12A_2)n + (9A_0 + 6A_1 + 8A_2) = n^2$$

$$\begin{cases} 9A_2 = 1 \\ 9A_1 + 12A_2 = 0 \\ 9A_0 + 6A_1 + 8A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = 0, A_1 = -\frac{4}{27}, A_2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = (c_1 + nc_2)(-2)^n - \frac{4}{27}n + \frac{1}{9}n^2$$

حال با توجه به شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 = 0 \\ a_1 = -2c_1 - 2c_2 - \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = -\frac{55}{54}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر درمی آید:

$$a_n = -\frac{55}{54}n(-2)^n - \frac{4}{27}n + \frac{1}{9}n^2$$

د) ریشه‌های معادله $r^2 - 1 = 0$ به صورت $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ است. بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(h)} = c_1(1)^n + c_2(-1)^n$ خواهد بود. جواب ویژه نیز به صورت زیر است.

$$a_n^{(p)} = A \sin \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2}$$

با جاگذاری در رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & (A \sin \frac{(n+2)\pi}{2} + B \cos \frac{(n+2)\pi}{2}) - (A \sin \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2}) = \sin \frac{n\pi}{2} \\ \Rightarrow & (A \sin(\frac{n\pi}{2} + \pi) + B \cos(\frac{n\pi}{2} + \pi)) - (A \sin \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2}) = \sin \frac{n\pi}{2} \\ \Rightarrow & (-A \sin \frac{n\pi}{2} - B \cos \frac{n\pi}{2}) - (A \sin \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2}) = \sin \frac{n\pi}{2} \\ \Rightarrow & -2A \sin \frac{n\pi}{2} - 2B \cos \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{n\pi}{2} \\ \Rightarrow & \begin{cases} -2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0. \end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = c_1 + c_2(-1)^n - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ a_1 = c_1 - c_2 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = -\frac{3}{4}$$

$$a_n = \frac{3}{4} - \frac{3(-1)^n}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

۴۰- رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n, n \geq 0 \\ a_0 = 1, a_1 = 4 \end{cases}$$

پاسخ:

ریشه معادله $r^2 - 6r + 9 = 0$ به صورت $r_1 = r_2 = 3$ می‌باشد. بنابراین جواب قسمت همگن به صورت $a_n^{(p)} = (c_1 + nc_2)3^n$ است. با توجه به اینکه $n3^n$ یک جواب برای مساله همگن است.

جواب ویژه مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n^{(p)} = A \times 2^n + n^r B \times 3^n$$

(چون $n3^n$ یک جواب برای مساله همگن است پس $Bn^r 3^n$ را باید متناظر با 3^n در نظر می گیریم.)

با جاگذاری در رابطه بازگشتی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} & (A \times 2^{n+1} + (n+1)^r B \times 3^{n+1}) - 6(A \times 2^{n+1} + (n+1)^r B \times 3^{n+1}) \\ & + 9(A \times 2^n + n^r B \times 3^n) = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2^n (4A - 12A + 9A) + 3^n (9(n+1)^r B - 18(n+1)^r B + 9n^r B) \\ = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 9(n+1)^r B - 18(n+1)^r B + 9n^r B = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 18B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = \frac{7}{18}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر درمی آید:

$$a_n = (c_1 + nc_r) 3^n + 2 \times 2^n + \frac{7}{18} n^r \times 3^n$$

حال با جاگذاری در شرایط مرزی ضرایب c_1, c_r را نیز بدست می آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + 2 = 1 \\ a_1 = 3c_1 + 3c_r + 2 + \frac{7}{18} = 4 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -2, \quad c_r = \frac{25}{18}$$

در نتیجه جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = (-2 + \frac{25}{18}n) 3^n + 2 \times 2^n + \frac{7}{18} n^r \times 3^n$$

۴۱- رابطه بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2 + 5n, n \geq 0 \\ a_0 = 0, a_1 = \frac{25}{24}, a_2 = \frac{10}{3} \end{cases}$$

پاسخ:

معادله مشخصه $r^2 - 3r + 2 = 0$ دارای ریشه تکراری $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ است. بنابراین جواب قسمت همگن به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n^{(h)} = c_1 + nc_2 + n^2 c_3$$

برای بدست آوردن جواب ویژه با توجه به اینکه n^2, n در جواب همگن وجود دارند. لذا جواب ویژه به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n^{(p)} = A_1 n^2 + n^3 (A_2 + A_3 n)$$

که با جاگذاری در رابطه مورد بحث می‌توان ضرایب A_1, A_2, A_3 را بدست آورد. در نتیجه، جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + A_1 n^2 + n^3 (A_2 + A_3 n)$$

$$42- 7 - n = c_1 2^n + c_2 3^n + a_n, \text{ جواب عمومی رابطه بازگشتی}$$

$$a_{n+2} + b_1 a_{n+1} + b_2 a_n = b_3 n + b_4, n \geq 0$$

است. ضرایب ثابت b_1, b_2, b_3, b_4 را بدست آورید.

پاسخ:

با توجه به صورت مساله روشن است 2 و 3 ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + b_1 r + b_2 = 0$ هستند. پس

$$b_1 = -5, b_2 = 6$$

از طرفی برای مساله مورد بحث جواب ویژه به صورت زیر است:

$$a_n^{(p)} = A_1 + n(A_2 + nA_3)$$

$$= A_1 + A_2 n + A_3 n^2$$

تذکر: چون A_1 یک جواب ویژه است، پس جواب ویژه متناسط با $b_3 n$ ، که برابر $A_2 + nA_3$ است را به خاطر داشتن اسکالر ثابت A_2 ، در n ضرب می‌کنیم تا این جواب از A_1 مجزا باشد.

اما با توجه به اینکه $a_n = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + n - 7$ جواب عمومی مساله است، پس

$$a_n^{(p)} = A_1 + A_2 n + A_3 n^2 = n - 7$$

$$\Rightarrow A_1 = -7, A_2 = 1, A_3 = 0$$

از طرفی $a_n^{(p)}$ باید در رابطه بازگشتی صدق کند. یعنی:

$$\begin{aligned} & [A_1 + A_7(n+2) + A_7(n+2)^7] - 5[A_1 + A_7(n+1) + A_7(n+1)^7] \\ & + 6[A_1 + A_7n + A_7n^7] = b_7n + b_7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [-7 + (n+2)] - 5[-7 + (n+1)] + 6[-7 + n] = b_7n + b_7$$

$$\Rightarrow (1-5+6)n + [-7+2+35-5-42] = b_7n + b_7$$

$$\Rightarrow b_7 = 2, \quad b_7 = -17$$

۴۳- روابط بازگشتی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+2}^7 - 5a_{n+1}^7 + 6a_n^7 = 7n, & n \geq 0 \\ a_1 = a_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} a_n + na_{n-1} = n!, & n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} a_n^7 - 2a_{n-1}^7 = 0, & n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

(راهنمایی: فرض کنید که $b_n = \log_7 a_n$, $n \geq 0$).

پاسخ:

(الف) با فرض $b_n = a_n^7$ رابطه بازگشتی به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{cases} b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 7n & n \geq 0 \\ b_1 = b_0 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

برای رابطه اخیر، معادله مشخصه به صورت $r^2 - 5r + 6 = 0$ است. که ریشه های آن

عبارتند از $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. بنابراین جواب قسمت همگن به صورت

$$a_n^{(h)} = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n$$

است. جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A_1 + A_7n$ می باشد. که با جاگذاری در رابطه

(*) خواهیم داشت:

$$(A_1 + A_7(n+2)) - 5(A_1 + A_7(n+1)) + 6(A_1 + A_7n) = 7n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A_1 - 2A_7 = 0 \\ 2A_7 = 7 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{7}{4}, \quad A_7 = \frac{7}{2}$$

لذا، جواب (*) عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$b_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{21}{4} + \frac{7}{2}n$$

که با جاگذاری در شرایط مرزی مقادیر c_1, c_2 نیز به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} b_0 = c_1 + c_2 + \frac{21}{4} = 1 \\ b_1 = 2c_1 + 3c_2 + \frac{21}{4} + \frac{7}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{4}, \quad c_2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین

$$b_n = -\frac{5}{4} \times 2^n + \frac{9}{4} \times 3^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$$

در نتیجه:

$$a_n^* = -\frac{5}{4} \times 2^n + \frac{9}{4} \times 3^n + \frac{7}{2}n + \frac{21}{4}$$

ب) داریم:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1 - 1 \times a_0 = 1 - 1 = 0$$

$$a_2 = 2! - 2 \times a_1 = 2!$$

$$a_3 = 3! - 3 \times a_2 = 0$$

$$a_4 = 4! - 4 \times a_3 = 4!$$

\vdots

$$a_{2n} = (2n)!, \quad a_{(2n+1)} = 0 \quad n \geq 0$$

ج) داریم:

$$a_1 = 2$$

$$a_1^* = 2a_1 = 2^2 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_2^* = 2a_1 = 2^2 \Rightarrow a_2 = 2$$

\vdots

$$a_n = 2 \quad n \geq 0$$

۴۴- برای هر کدام از معادلات زیر، تعداد جوابهای صحیح را بدست آورید.

(الف) $1 \leq i \leq 4, 0 \leq c_i \leq 7, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$

(ب) $1 \leq i \leq 4, 0 \leq c_i \leq 4, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ و c_2 زوج هستند.

(ج) $2 \leq i \leq 5, 3 \leq c_i \leq 8, 2 \leq c_1 \leq 4, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30$

(د) $1 \leq i \leq 5, 0 \leq c_i \leq 4, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 20$ و c_2 فرد هستند.

پاسخ:

(الف) تعداد جوابهای صحیح معادله داده شده، برابر است با ضریب x^{20} در رابطه زیر:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^7)^4 = \left[\frac{1 - x^8}{1 - x} \right]^4$$

بنابراین ضریب x^{20} در عبارت:

$$(1 - x^8)^4 (1 - x)^{-4} = (1 - c_1^8 x^8 + c_2^8 x^{16} - c_3^8 x^{24} + c_4^8 x^{32}) (c_1^4 + c_2^4 (-x) + c_3^4 (-x)^2 + \dots)$$

جواب مساله است. این ضریب مساوی

$$c_{-r}^4 (-1)^0 - c_{-r}^4 c_1^4 (-1)^1 + c_{-r}^4 c_2^4 (-1)^2 = 161$$

است.

(ب) تعداد جوابهای صحیح معادله داده شده برابر است با ضریب x^{20} در رابطه زیر

$$(1 + x + \dots + x^{20})^4 (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{20})^4$$

این ضریب با ضریب x^{20} در رابطه زیر برابر است:

$$(1 + x + x^2 + \dots)^4 (1 + x^2 + x^4 + \dots)^4 = \left(\frac{1}{1 - x} \right)^4 \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)^4$$

از طرفی داریم:

$$(1 - x)^{-4} (1 - x^2)^{-4} = (c_{-r}^4 + c_{-r}^4 (-x) + c_{-r}^4 (-x)^2 + \dots) (c_{-r}^4 + c_{-r}^4 (-x^2) + c_{-r}^4 (-x^2)^2 + \dots)$$

بنابراین ضریب x^{20} در عبارت بالا مساوی است با:

$$\begin{aligned} & c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^0 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^1 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^2 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^3 \\ & + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^4 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^5 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^6 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^7 \\ & + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^8 + c_{-r}^4 c_{-r}^4 (-1)^9 + c_{-r}^4 = 506 \end{aligned}$$

(ج) تعداد جوابهای صحیح معادله داده شده برابر ضریب x^{30} در عبارت زیر است:

$$(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^2 (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)^4$$

این ضریب، مساوی با ضریب x^{28} در عبارت زیر است:

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)^4 = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} \right) \left(\frac{1 - x^4}{1 - x} \right)^4$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
 (1-x^r)(1-x)^{-r}(1-x^r)^r(1-x)^{-r} &= (1-x^r)(1-x^r)^r(1-x)^{-2r} \\
 &= (1-x^r)[c_r^r - c_r^1 x^r + c_r^2 (x^r)^2 - c_r^3 (x^r)^3 + c_r^4 (x^r)^4] [c_{-r}^0 + c_{-r}^1 (-x) + \dots] \\
 &= [c_r^r - c_r^1 x^r + \dots + c_r^r x^{r^2}] [c_{-r}^0 + c_{-r}^1 (-x) + \dots] \\
 &\quad - x^r [c_r^r - c_r^1 x^r + \dots + c_r^r x^{r^2}] [c_{-r}^0 + c_{-r}^1 (-x) + \dots]
 \end{aligned}$$

بنابراین ضریب x^{2r} برابر است با:

$$\begin{aligned}
 &[c_r^r c_{-r}^0 (-1)^0 - c_r^1 c_{-r}^1 (-1)^1 + c_r^2 c_{-r}^2 (-1)^2 - c_r^3 c_{-r}^3 (-1)^3 + c_r^4 c_{-r}^4 (-1)^4] \\
 &- [c_r^r c_{-r}^1 (-1)^1 - c_r^1 c_{-r}^2 (-1)^2 + c_r^2 c_{-r}^3 (-1)^3 - c_r^3 c_{-r}^4 (-1)^4 + c_r^4 c_{-r}^5 (-1)^5] \\
 &= 7582
 \end{aligned}$$

(د) تعداد جوابهای معادله داده شده برابر است با ضریب x^{2r} در رابطه زیر:

$$(x+x^r+\dots+x^{r^2})^r(1+x+x^r+\dots+x^{r^2})^r = x^{r^2}(1+x^r+\dots+x^{r^2})^r(1+x+\dots+x^{r^2})^r$$

این ضریب برابر ضریب x^{18} در عبارت زیر است:

$$(1+x^r+x^{r^2}+\dots)^r(1+x+x^r+\dots)^r = \left(\frac{1}{1-x^r}\right)^r \left(\frac{1}{1-x}\right)^r$$

از طرفی داریم:

$$(1-x^r)^{-r}(1-x)^{-r} = (c_{-r}^0 + c_{-r}^1(-x^r) + c_{-r}^2(-x^r)^2 + \dots)(c_{-r}^0 + c_{-r}^1(-x) + \dots)$$

بنابراین ضریب x^{18} در عبارت بالا برابر است با:

$$\begin{aligned}
 &c_{-r}^0 c_{-r}^{18} - c_{-r}^1 c_{-r}^{17} + c_{-r}^2 c_{-r}^{16} - c_{-r}^3 c_{-r}^{15} + c_{-r}^4 c_{-r}^{14} - c_{-r}^5 c_{-r}^{13} \\
 &+ c_{-r}^6 c_{-r}^{12} - c_{-r}^7 c_{-r}^{11} + c_{-r}^8 c_{-r}^{10} - c_{-r}^9 c_{-r}^9 = 2200
 \end{aligned}$$

۴۵- می‌خواهیم ۳۵ توپ (از میان تعداد نامتناهی توپ) را بین ۵ کودک به گونه توضیح داده شده در زیر توزیع بکنیم. تابع مولد هر کدام از حالت‌های مربوطه را بدست آورید.

(الف) هیچ شرطی برای توزیع وجود ندارد.

(ب) به هر کودک دست‌کم باید یک توپ برسد.

(ج) به هر کودک باید دست‌کم دو توپ برسد.

(د) به کودک بزرگ‌تر دست‌کم باید ۱۰ توپ برسد.

(و) به هر دو کودک از همه کم‌سن‌تر باید ۱۰ توپ برسد.

پاسخ:

(الف) در این حالت، تابع مولد به صورت زیر خواهد بود:

$$(1+x^1+x^2+x^3+\dots+x^{25})^5$$

(ج) داریم:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

بنابراین $\frac{1}{1+x}$ تابع مولد رشته داده شده است.

(د) داریم:

$$\sum_{n=r}^{\infty} x^n = \frac{x^r}{1-x}$$

بنابراین $\frac{x^r}{1-x}$ تابع مولد رشته داده شده است.

(ر) داریم:

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$$

پس $\frac{1}{1-x^2}$ تابع مولد رشته داده شده است.

(ز) داریم

$$6x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 6x^5 + \dots = -6(-x^2 + x^3 - x^4 + \dots)$$

$$= -6 \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^n$$

$$= \frac{-6(-x)^2}{1-(-x)} = \frac{6x^2}{1+x}$$

پس $\frac{6x^2}{1+x}$ تابع مولد رشته داده شده است.

(س) داریم:

$$x^r + a^r x^r + a^r x^r + \dots = x^r + (ax)^r + (ax)^r + \dots$$

$$= x^r + \sum_{n=r}^{\infty} (ax)^n$$

$$= x^r + \frac{(ax)^r}{1-ax}$$

$$= \frac{x^r(1-ax) + a^r x^r}{1-ax}$$

$$= \frac{(1+a^r)x^r - ax^r}{1-ax}$$

پس $\frac{1}{1+3x}$ تابع مولد رشته $1, -3, 3^2, -3^3, \dots$ است.

(د) داریم:

$$\frac{x^r}{1-x^r} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (x^r)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{r(n+1)} = x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$$

پس $\frac{x^r}{1-x^r}$ تابع مولد رشته $0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots$ است.

(ر) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + 2x^r - 11 &= 2x^r - 11 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= -10 + x + x^r + x^{r+1} + \dots + x^r + 4x^{r+1} + x^{r+2} + x^{r+3} + \dots \end{aligned}$$

بنابراین تابع داده شده، تابع مولد رشته زیر است:

$$-10, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, \dots$$

(ز) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2x} + \frac{5x}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + 5x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5x^{n+1} \\ &= (1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \dots) + (5x + 5x^2 + 5x^3 + \dots) \\ &= (1 + (2+5)x + (2^2+5)x^2 + (2^3+5)x^3 + \dots) \end{aligned}$$

بنابراین تابع داده شده، مولد رشته زیر است:

$$1, 7, 9, 13, 17, 21, \dots$$

۴۸- الف) ضریب x^r را در عبارت $(1+x+x^2+x^3+\dots)^6$ پیدا کنید.

ب) ضریب x^r را در عبارت $(1+x+x^2+x^3+\dots)^n$ پیدا کنید، $n \in \mathbb{Z}^+$.

پاسخ:

الف) با توجه به مثال ۵-۳۵، ضریب x^r در عبارت داده شده برابر است با:

$$c_{15+r-1}^6 = c_{15+r-1}^6$$

ب) با توجه به مثال ۵-۳۵، ضریب x^r در عبارت داده شده برابر است با:

$$c_{n+r-1}^n = c_{n+r-1}^n$$

۴۹- ضریب x^{50} را در عبارت $(x^5 + x^4 + x^3 + \dots)^9$ پیدا کنید.

پاسخ:

داریم:

$$(x^5 + x^4 + \dots)^9 = (x^5)^9 (1 + x + x^2 + \dots)^9 = x^{45} (1 + x + \dots)^9$$

بنابراین ضریب x^{50} در عبارت داده شده برابر ضریب x^5 در عبارت زیر است:

$$(1 + x + x^2 + \dots)^9$$

اما، در عبارت اخیر ضریب x^5 برابر است با:

$$c_{5+9-1}^9 = c_{13}^9$$

۵۰- ضریب x^{20} را در عبارت $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^5$ پیدا کنید.

پاسخ:

این ضریب با ضریب x^{10} در عبارت $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^5$ برابر است.

۵۱- ضریب x^{10} را در عبارت زیر پیدا کنید.

$$\frac{x^2}{(1-2x)^{10}} \quad \text{الف)} \quad \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^7} \quad \text{ب)} \quad \frac{(1+x)^8}{(1-x)^7} \quad \text{ج)}$$

پاسخ:

الف) داریم:

$$\frac{x^2}{(1-2x)^{10}} = x^2 (1-2x)^{-10}$$

کافیست ضریب x^{12} را در عبارت $(1-2x)^{-10}$ پیدا کنیم.

$$(1-2x)^{-10} = c_{-10}^1 + c_{-10}^2 (-2x)^2 + c_{-10}^3 (-2x)^3 + \dots$$

در عبارت فوق، ضریب x^{12} برابر است با:

$$c_{-10}^{12} (-2)^{12} = 2^{12} c_n^{12}$$

$$(c_{-n}^r = (-1)^r c_{n+r-1}^r)$$

ب) داریم:

$$\frac{x^2 - 2x}{(1-x)^7} = \frac{x^2}{(1-x)^7} - \frac{2x}{(1-x)^7}$$

$$x^2 (1-x)^{-7} - 2x(1-x)^{-7} = x^2 [c_{-7}^2 + c_{-7}^3 (-x) + \dots] - 2x [c_{-7}^1 + c_{-7}^2 (-x) + \dots]$$

کافیست ضریب x^{12} در عبارت اول و ضریب x^{13} در عبارت دوم را پیدا کرده با هم

جمع کنیم تا ضریب x^{10} در عبارت اصلی بدست آید.

ضریب x^{12} در عبارت اول برابر است با :

$$c_{-r}^{12}(-1)^{12} = c_{-r}^{12} = c_{12}^{12}$$

و ضریب x^{12} در عبارت دوم برابر است با :

$$-2(c_{-r}^{12}(-1)^{12}) = -2(c_{-r}^{12}) = -2c_{12}^{12}$$

بنابراین ، ضریب x^{12} در عبارت اصلی برابر است با :

$$c_{12}^{12} - 2c_{12}^{12}$$

(ج) داریم :

$$\frac{(1+x)^r}{(1-x)^r} = (1+x)^r(1-x)^{-r} = (c_r^0 + c_r^1x + \dots + c_r^rx^r)(c_{-r}^0 + c_{-r}^1(-x) + \dots)$$

لذا ، ضریب x^{12} برابر است با :

$$c_r^0c_{-r}^{12}(-1)^{12} + c_r^1c_{-r}^{11}(-1)^{11} + c_r^2c_{-r}^{10}(-1)^{10} + c_r^3c_{-r}^9(-1)^9 + c_r^4c_{-r}^8(-1)^8 \\ = c_r^0c_{12}^{12} + c_r^1c_{11}^{11} + c_r^2c_{10}^{10} + c_r^3c_{9}^9 + c_r^4c_{8}^8$$

۵۲- طلایه را ۱۲ بار می‌اندازیم . احتمال اینکه مجموع اعداد نشان داده شده ، مساوی ۳۰ بشود ، چقدر است ؟

پاسخ :

فرض کنیم x_i عدد رو شده در مرحله i -ام باشد ($1 \leq i \leq 12$) . در این صورت تعداد دفعاتی که مجموع ۱۲ عدد رو شده برابر ۳۰ باشد برابر است با تعداد جوابهای معادله زیر

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 30 \quad 1 \leq x_i \leq 6 \quad 1 \leq i \leq 12$$

بنابراین ، ضریب x^{30} را در رابطه زیر پیدا می‌کنیم :

$$(x + x^2 + \dots + x^6)^{12} = x^{12}(1 + x + \dots + x^5)^{12}$$

پس ضریب x^{18} را در رابطه زیر پیدا می‌کنیم :

$$(1 + x + \dots + x^5)^{12} = \frac{(1-x^6)^{12}}{(1-x)^{12}}$$

از طرفی داریم :

$$(1-x^6)^{12}(1-x^6)^{-12} = [c_{12}^0 + c_{12}^1(-x^6) + \dots + c_{12}^{12}(-x^6)^{12}][c_{-12}^0 + c_{-12}^1(-x) + \dots]$$

بنابراین ضریب x^{18} برابر است با :

$$c_{12}^0c_{-12}^{18}(-1)^{18} - c_{12}^1c_{-12}^{17}(-1)^{17} + c_{12}^2c_{-12}^{16}(-1)^{16} - c_{12}^3c_{-12}^{15} = 19188950$$

حال، احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده برابر ۳۰ باشد برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد دفعاتی که مجموع اعداد رو شده ۳۰ است}}{\text{تعداد کل دفعات}} = \frac{19188950}{6^{32}} \approx 0.0088$$

۵۳- روابط بازگشتی زیر را با استفاده از توابع مولد حل کنید:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 3^n, n \geq 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = n!, n \geq 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases} \quad (\text{د})$$

پاسخ:

الف) فرض کنیم $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در این صورت:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + 3^{n-1}) x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n-1} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \\ &= 1 + xA(x) + \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(x) - xA(x) = \frac{1-2x}{1-3x}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (rx)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} r^n \right) x^n \end{aligned}$$

در نتیجه

$$a_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r^n \quad n \geq 0.$$

(ب)

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + (n-1)r) x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)r x^{n-1} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} n r x^n \\ &= 1 + xA(x) + \frac{x(x+1)}{(1-x)^r} \end{aligned}$$

که در اینجا، جواب سری دوم با استفاده از مثال ۵-۲۹ قسمت (د) بدست آمده است.

بنابراین:

$$\begin{aligned} (1-x)A(x) &= 1 + \frac{x(x+1)}{(1-x)^r} \\ \Rightarrow A(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{x(x+1)}{(1-x)^r} \end{aligned}$$

(ج) داریم:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + rx + \sum_{n=2}^{\infty} (r^{n-1} + ra_{n-1} - a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + rx + x^r \sum_{n=r}^{\infty} (rx)^{n-r} + rx \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - x^r \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-r} x^{n-r} \\
&= 1 + rx + x^r \sum_{n=r}^{\infty} (rx)^n + rx \left[\sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n - a_r \right] - x^r \sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n \\
&= 1 + rx + \frac{x^r}{1-rx} + rx[A(x) - 1] - x^r A(x) \\
\Rightarrow A(x) - rx A(x) + x^r A(x) &= \frac{x^r - rx + 1}{1-rx} \\
\Rightarrow A(x) &= \frac{(x^r - rx + 1)}{(x-1)^r (1-rx)}
\end{aligned}$$

(د) داریم:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n = a_r + a_{r+1} x + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n x^n \\
&= 1 + rx + \sum_{n=r+1}^{\infty} [(n-r) + ra_{n-1} - a_{n-r}] x^n \\
&= 1 + rx + x^r \sum_{n=r}^{\infty} (n-r) x^{n-r} + rx \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - x^r \sum_{n=r}^{\infty} a_{n-r} x^{n-r} \\
&= 1 + rx + x^r \sum_{n=r}^{\infty} nx^n + rx \left[\sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n - a_r \right] - x^r \sum_{n=r}^{\infty} a_n x^n \\
&= 1 + rx + x^r \left(\frac{x}{(1-x)^r} \right) + rx[A(x) - 1] - x^r A(x) \\
\Rightarrow A(x) - rx A(x) + x^r A(x) &= 1 + \frac{x^r}{(1-x)^r} \\
\Rightarrow A(x) &= \frac{1}{(1-x)^r} + \frac{x^r}{(1-x)^r}
\end{aligned}$$

۵۴- فرض کنید که برای n شیء متمایز $a(n, r)$ تعداد حالت‌هایی باشد که از میان آن‌ها r شیء را بتوان بدون تکرار انتخاب کرد. بنابراین، زمانی که $r > n$ ، $a(n, r) = 0$. از رابطه بازگشتی $a(n, r) = a(n-1, r-1) + a(n-1, r)$ ، $n \geq 1$ ، $r \geq 1$ ، استفاده کرده و نشان دهید که $f(x) = (1+x)^n$ ، تابع مولد $a(n, r)$ است $r \geq 0$.

پاسخ:

برای اثبات مساله، ضریب x^r را در $(1+x)^n$ محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم ضریب x^r را در $(1+x)^{n-1}$ می‌دانیم و این ضریب $a(n-1, r)$ باشد. برای محاسبه توان r -ام x در $(1+x)^n$ دو راه پیش رو داریم:

(۱) توان r -ام x را از $(1+x)^{n-1}$ و عدد ۱ را از $(1+x)$ برداریم. که این راه ضریب $a(n-1, r)$ را به دست می‌دهد.

(۲) توان $(r-1)$ -ام x را از $(1+x)^{n-1}$ و x را از $(1+x)$ برداریم. که این راه $a(n-1, r-1)$ را به دست می‌دهد.

چون راه‌های بالا مجزا از هم هستند پس ضریب x^r در $(1+x)^n$ برابر خواهد بود با:

$$a(n, r) = a(n-1, r-1) + a(n-1, r)$$

برای $r > n$ نیز روشن است ضریب x^r در $(1+x)^n$ برابر صفر است. بنابراین $(1+x)^n$ ، تابع مولد $a(n, r)$ است.

$$A = A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{۵۶-مر } A \text{، مطلوب است:}$$

الف) A^n

ب) A^{100}

پاسخ:

الف) فرض کنیم

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & a_{12}^n \\ 0 & a_{22}^n \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1} \\ 0 & a_{22}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11}^{n-1} & -a_{11}^{n-1} + 2a_{12}^{n-1} \\ 0 & 2a_{22}^{n-1} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_{11}^n = 3a_{11}^{n-1} \\ a_{12}^n = -a_{11}^{n-1} + 2a_{12}^{n-1} \\ a_{22}^n = 2a_{22}^{n-1} \end{cases}$$

از دو رابطه اول بدست می‌آوریم:

$$a_{11}^n = 3^n, \quad a_{22}^n = 2^n$$

و رابطه سوم به صورت زیر درمی آید :

$$\begin{cases} a_{1r}^n = -3^{n-1} + 2a_{1r}^{n-1} & n \geq 2 \\ a_{1r}^1 = -1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن جواب عمومی این رابطه ، ابتدا توجه می کنیم که ریشه معادله مشخصه $3-2=0$ برابر ۲ است . بنابراین جواب قسمت همگن برابر است با :

$$a_{1r}^n = c_1(2)^n$$

و جواب ویژه نیز به صورت

$$b_{1r}^n = A3^{n-1}$$

می باشد . با جاگذاری در رابطه بازگشتی خواهیم داشت :

$$A3^{n-1} = -3^{n-1} + 2(A3^{n-2})$$

$$\Rightarrow 2A = -2 + 2A \Rightarrow A = -2$$

بنابراین جواب عمومی به صورت

$$a_{1r}^n = c_1(2)^n - 3^n$$

می باشد که با جاگذاری در شرایط مرزی مقدار ثابت c_1 را نیز به دست می آوریم :

$$a_{1r}^1 = 2c_1 - 1 = -1 \Rightarrow c_1 = 1$$

پس

$$a_{1r}^n = 2^n - 3^n$$

بنابراین

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

(ب) با توجه به الف داریم :

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 2^{100} - 3^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

۵۷- روابط بازگشتی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} a_n - 9a_{n-1} + 26a_{n-2} - 24a_{n-3} = 5^n, & n \geq 3 \\ a_1 = 1, & a_2 = 18, & a_3 = 45 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0, & n \geq 2 \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} - 12a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_1 = 4, a_2 = \frac{16}{3} \end{cases} \quad (ج)$$

$$\begin{cases} a_n + 5a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_1 = 0, a_2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad (د)$$

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_1 = \frac{5}{3}, a_2 = 8 \end{cases} \quad (ه)$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases} \quad (و)$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n, n \geq 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases} \quad (ز)$$

پاسخ :

الف) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 4r + 24r - 24 = 0$ عبارتند از :

$$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$$

بنابراین جواب همگن به صورت زیر است :

$$a_n^{(h)} = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + c_3 \times 4^n$$

جواب ویژه نیز به صورت $a_n^{(p)} = A\delta^n$ است. با جاگذاری در رابطه بازگشتی بدست می‌آوریم :

$$A\delta^n - 4A\delta^{n-1} + 24A\delta^{n-2} - 24A\delta^{n-2} = \delta^n$$

$$\Rightarrow 6A = \delta^2 \Rightarrow A = \frac{\delta^2}{6}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$a_n = c_1 \times 2^n + c_2 \times 3^n + c_3 \times 4^n + \frac{1}{6} \delta^{n+2}$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_r + c_r + \frac{\Delta^r}{6} = 1 \\ a_1 = 2c_1 + 3c_r + 4c_r + \frac{\Delta^r}{6} = 18 \\ a_2 = 4c_1 + 9c_r + 16c_r + \frac{\Delta^r}{6} = 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{166}{3}, \quad c_r = \frac{235}{3}, \quad c_r = -82$$

بنابراین، جواب عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = \left(-\frac{166}{3}\right) \times 3^n + \left(\frac{235}{3}\right) \times 3^n - 82 \times 4^n + \frac{1}{6} \Delta^{n+2} \quad n \geq 0$$

ب) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 3r - 4 = 0$ برابر است با $r_1 = 4$ ، $r_2 = -1$ بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = c_1(4)^n + c_r(-1)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_r = 1 \\ a_1 = 4c_1 - c_r = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5}, \quad c_r = \frac{3}{5}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر درمی‌آید:

$$c_n = \frac{2}{5} \times 4^n + \frac{3}{5}(-1)^n$$

ج) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 4r - 12 = 0$ عبارتند از $r_1 = 6$ ، $r_2 = -2$ بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = c_1 \times 6^n + c_r \times (-2)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_r = 4 \\ a_1 = 6c_1 - 2c_r = \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{3}, \quad c_r = \frac{7}{3}$$

لذا، جواب عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{5}{3} \times 6^n + \frac{7}{3}(-2)^n$$

(د) ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + 5r + 5 = 0$ عبارتند از

$$r_r = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}$$

لذا

$$a_n = c_1 \left(\frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_r \left(\frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_r = 0 \\ a_1 = c_1 \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} + c_r \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = -2, \quad c_r = 2$$

$$\Rightarrow a_n = -2 \left(\frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + 2 \left(\frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

(ه) ریشه معادله مشخصه $r^2 - 4r + 4 = 0$ برابر $r=2$ است. لذا

$$a_n = (c_1 + nc_r) 2^n$$

با جاگذاری در شرایط مرزی c_r, c_1 را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} a_0 = c_1 = \frac{5}{2} \\ a_1 = 2c_1 + 2c_r = 8 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{2}, \quad c_r = \frac{3}{2}$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود :

$$a_n = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}n \right) \times 2^n$$