

حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

کرداورنده:

**Pnu-Soal.ir**

# فصل چہارم

## تمرینات فصل ۴

۱- در قسمت‌های زیر تعیین کنید که آیا رابطه  $R$  یک رابطه با ترتیب جزئی در  $A$  می‌باشد و یا خیر؟

الف)  $A = Z$  و  $aRb \Leftrightarrow a = 2b$

ب)  $A = Z$  و  $b^2 | a \Leftrightarrow aRb$

ج)  $A = Z$  و  $aRb \Leftrightarrow a = b^k$  برای یک  $k \in Z^+$

👉 پاسخ:

الف) در  $R$  رابطه بازتابی برقرار نیست. بنابراین  $R$  یک ترتیب جزئی نمی‌باشد.

ب) رابطه بازتابی در  $R$  برقرار نمی‌باشد (مثلاً  $2 \notin 2^2$ ) پس  $R$  یک ترتیب جزئی نمی‌باشد.

ج) ثابت می‌کنیم  $R$  یک ترتیب جزئی است.

(۱) بازتابی: اگر  $a \in A$  آنگاه با فرض  $k = 1$  داریم  $a = a$  پس  $aRa$

(۲) ضدتقارن: فرض کنیم  $a, b \in A$ ،  $aRb$ ،  $bRa$  در این صورت  $k, k' \in Z^+$  وجود دارد به طوری که

$$a = b^k, \quad b = a^{k'}$$

$$\Rightarrow a = (a^{k'})^k = a^{kk'}$$

$$\Rightarrow kk' = 1$$

از اینکه  $k, k' \in Z^+$  نتیجه می‌شود که  $k = k' = 1$ ، پس  $a = b$ .

(۳) تعدی: فرض کنیم  $a, b, c \in A$ ،  $aRb$ ،  $bRc$  در این صورت  $k, k' \in Z^+$  وجود دارند به گونه‌ای که

$$a = b^k, \quad b = c^{k'} \Rightarrow a = (c^{k'})^k = c^{kk'} \Rightarrow aRc$$

در نتیجه  $R$  یک رابطه ترتیب جزئی روی  $A$  است.

۲- آیا رابطه تعریف شده در زیر یک ترتیب کامل است؟  
 $A = R \times R$  و  $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow a \leq a' \text{ و } b \leq b'$  که در آن  $\leq$  رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی است.

پاسخ: ➡

روشن است  $(1, 2) \in A$  و  $(2, 1) \in A$ ، در حالیکه این دو عنصر قابل مقایسه نمی باشند.  
 پس، رابطه تعریف شده کامل نمی باشد.  
 ۳- رابطه  $R$  تعریف شده به وسیله نمودار هاس زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.



پاسخ: ➡

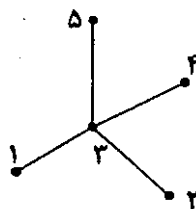
داریم:

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (2, 4)\}$$

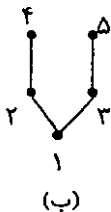
۴- نمودار هاس رابطه تعریف شده به وسیله ماتریس رابطه زیر را رسم کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

پاسخ: ➡



۵- ماتریس رابطه تعریف شده به وسیله نمودار هاس زیر را به دست آورید:



پاسخ :

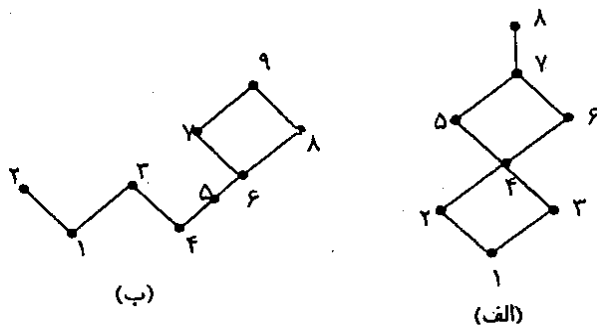
الف) در نمودار هاس همه حلقه‌ها حذف می‌شوند. بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) در نمودار هاس همه حلقه‌ها حذف می‌شوند و خطوطی که از تعدی بودن بدست می‌آیند نیز نمایش داده نمی‌شوند بنابراین ماتریس رابطه داده شده به صورت زیر خواهد بود :

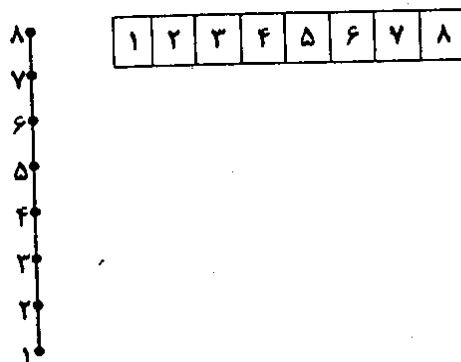
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶- نمودار هاس ترتیب توپولوژیکی روابط زیر را به دست آورید.



پاسخ :

الف) یک ترتیب توپولوژیکی برای نمودار (الف) به صورت زیر است :

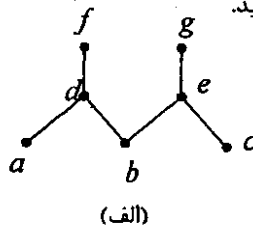
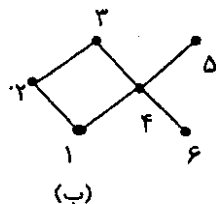


(ب) یک ترتیب توپولوژیکی برای نمودار (ب) به صورت زیر است :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
---	---	---	---	---	---	---	---	---



۷- برای مجموعه‌های با ترتیب جزئی تعریف شده توسط نمودارهای هاس زیر، تمامی ماکزیمال‌ها و مینیمال‌ها را تعیین کنید.



پاسخ :

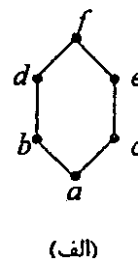
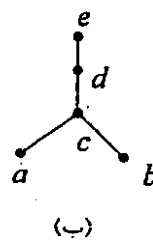
الف) عناصر ماکزیمال :  $g, f$

عناصر مینیمال :  $c, b, a$

ب) عناصر ماکزیمال :  $۵, ۳$

عناصر مینیمال :  $۱, ۶$

۸- بزرگترین عضو و کوچکترین عضو مجموعه‌های با ترتیب جزئی زیر را در صورت وجود پیدا کنید.



پاسخ :

الف) بزرگترین عضو :  $f$

کوچکترین عضو :  $a$

ب) بزرگترین عضو :  $e$

کوچکترین عضو : وجود ندارد.

ج) بزرگترین عضو : وجود ندارد.

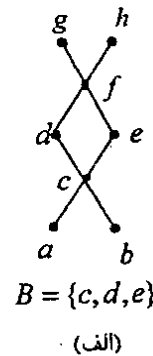
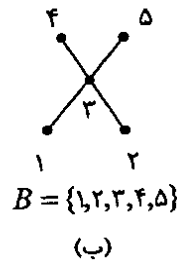
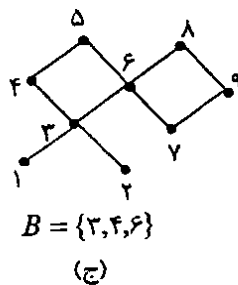
کوچکترین عضو : وجود ندارد.

د) بزرگترین عضو :  $\Delta$

کوچکترین عضو : وجود ندارد. (توجه کنید که رابطه  $1 \leq 3$  برقرار نیست ، لذا ۱ را

نمی توان به عنوان کوچکترین عضو در نظر گرفت.)

۹- کرانه های بالا و پایین ،  $LUB$  و  $GLB$  را ، در صورت وجود ، برای مجموعه  $B$  در نمودارهای هاس زیر پیدا کنید.



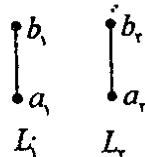
پاسخ :

الف)  $GLB = c$  ,  $LUB = f$

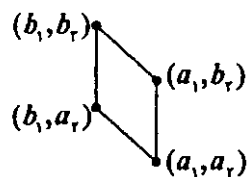
ب)  $GLB$  ,  $LUB$  هیچکدام وجود ندارند.

ج)  $GLB = 3$  ,  $LUB = \Delta$

۱۰- نمودار هاس شبکه  $L_4 \times L_4$  را رسم کنید که در آن  $L_4$  و  $L_4$  شبکه های تعریف شده توسط نمودارهای هاس زیر هستند.



پاسخ:



۱۱- نمودارهای هاس تمامی شبکه‌های غیریکریخت با یک، دو، سه، چهار و پنج عنصر را رسم کنید.

پاسخ:

مشبکه یک عنصری فقط به یک صورت زیر است:

۰۱

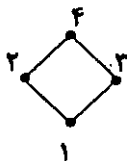
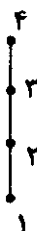
مشبکه دو عنصری فقط به یک صورت زیر است:



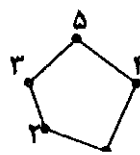
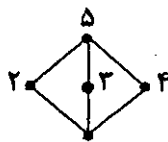
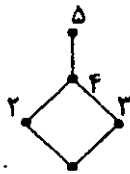
مشبکه سه عنصری نیز تنها به صورت زیر است:



مشبکه‌های چهار عنصری زیر غیریکریخت هستند:

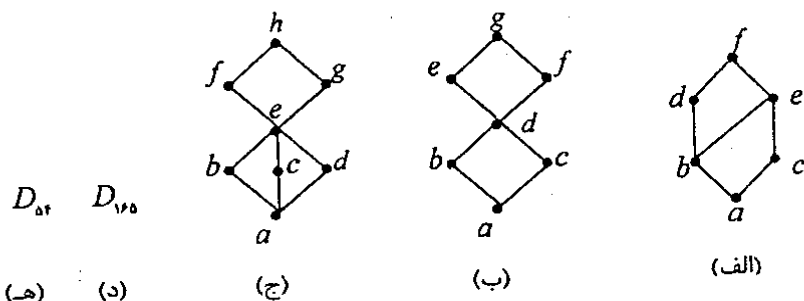


مشبکه‌های پنج عنصری زیر نیز غیریکریخت می‌باشند:





۱۲- کدام یک از مجموعه های با ترتیب جزئی زیر معرف یک جبر بول است؟

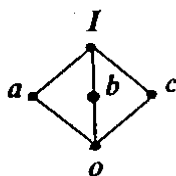


پاسخ:

می دانیم  $B_n$  دارای  $2^n$  عنصر است. بنابراین مجموعه ای با  $B_n$  یکرخت باشد باید  $2^n$  عنصر داشته باشد البته این یک شرط لازم است و کافی نیست بنابراین داریم:  
الف) مجموعه داده شده، دارای ۶ عنصر است بنابراین با توجه به توضیح بالا، مجموعه مورد بحث نمی تواند با  $B_n$  یکرخت باشد. بنابراین، جبر بول نیست. به عنوان مثال، عنصر  $e$  دارای متمم نیست.

ب) مجموعه داده شده دارای ۷ عنصر است. بنابراین جبر بول نمی باشد به عنوان مثال عنصر  $d$  دارای متمم نیست.

ج) مجموعه داده شده دارای  $2^3 = 8$  عنصر است. بنابراین، شرط لازم برای اینکه با  $B_3$  یکرخت باشد را دار است. اما مشاهده می شود که مجموعه مورد بحث دارای یک زیر شبکه است که با شبکه



یکریخت است. (زیر شبکه شامل  $a, b, c, d, e$  را در نظر بگیرید) در نتیجه بنا به قضیه ۴-۱۳ شبکه مورد بحث پخش ناپذیر است. پس شرط ۱۰' جبر بول برای مجموعه مورد بحث برقرار نیست لذا نمی تواند جبر بول باشد.

تذکر:

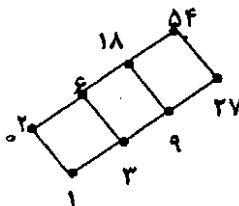
$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge (e) = b$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$$

$$\Rightarrow b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

د) داریم  $۱۱ \times ۵ \times ۳ = ۱۶۵$ ، در تمرین ۲۶ از همین فصل ثابت خواهیم کرد برای چنین اعدادی  $D_n$  جبر بول است.

ه) نمودار هاس  $D_{۵۲}$  به صورت زیر است:



در یک جبر بول هر عنصر باید دارای متمم منحصر بفرد باشد. در نمودار هاس  $D_{۵۲}$  به عنوان مثال عنصر ۳ دارای متمم نیست. بنابراین  $D_{۵۲}$  یک جبر بول نیست.  
۱۳- نشان دهید که در یک جبر بول به ازای هر  $a, b, c$ ، روابط زیر برقرار است:

$$b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b \quad \text{(الف)}$$

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) = b \wedge c \quad \text{(ب)}$$

$$((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' = (a' \vee b) \wedge c' \quad \text{(ج)}$$

پاسخ:

با توجه به جدول صفحه ۱۵۸ کتاب درسی داریم:

$$\begin{aligned} b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) &= b \wedge (a \vee (a' \wedge I)) \\ &= b \wedge (a \vee a') \\ &= b \wedge I \\ &= b \end{aligned}$$

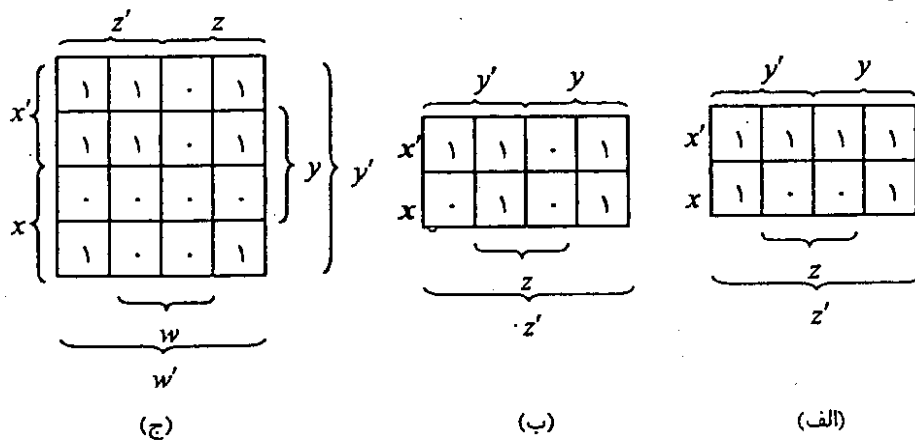
(ب)

$$\begin{aligned} (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge (b \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \wedge c)) \\ &= (b \wedge c) \vee ((b \wedge c) \wedge a) \\ &= b \wedge c \quad \text{(قانون جذبی)} \end{aligned}$$

(ج)

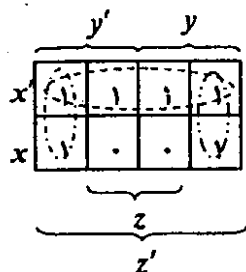
$$\begin{aligned} ((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= ((a \wedge b') \vee c)' = (a \wedge b')' \wedge c' \\ &= (a' \vee b) \wedge c' \end{aligned}$$

۱۴- عبارات بولی تعریف شده در زیر را ساده کرده و سپس نمودارهای منطقی آنها را رسم کنید.



پاسخ:

الف) داریم:



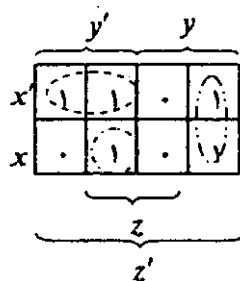
عبارت بولی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} x' \vee (x \wedge z') &= (x' \vee x) \wedge (x' \vee z') \\ &= I \wedge (x' \vee z') = x' \vee z' \end{aligned}$$

نمودار منطقی آن نیز به صورت زیر است:

$x$	$y$	$z$	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

(ب)



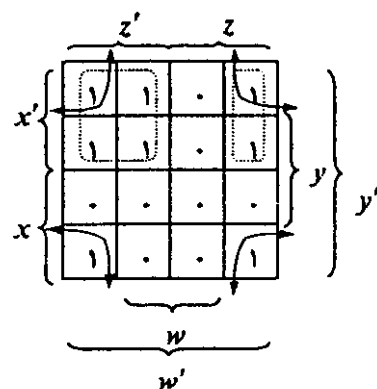
عبارت بولی به صورت زیر به دست می آید:

$$(x' \wedge y') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (y \wedge z')$$

نمودار منطقی نیز به صورت زیر است:

$x$	$y$	$z$	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

(ج)



عبارت بولی به صورت زیر به دست می آید:

$$(x' \wedge z') \vee (x' \wedge z \wedge w') \vee (y' \wedge w')$$

نمودار منطقی عبارت فوق نیز به صورت زیر خواهد بود :

$x$	$y$	$z$	$w$	$f(x,y,z,w)$
۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰

۱۶- نمودار هاس رابطه  $R$  را رسم کنید .

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

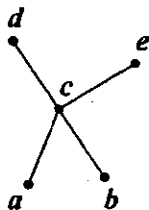
$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,d), (c,e), (a,d), (d,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (e,e)\}$$

پاسخ :

برای راحتی کار ابتدا صورت ماتریسی رابطه  $R$  را می نویسیم .

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نمودار هاس رابطه داده شده به صورت زیر است .



۱۷- نمودار هاس رابطه  $R$  را رسم کنید.

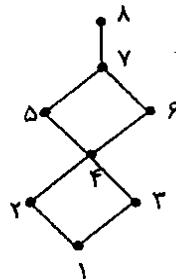
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

نمودار هاس رابطه داده شده به صورت زیر است:



۱۸- نمودار هاس ترتیب توپولوژیکی مجموعه با ترتیب جزئی زیر را رسم کنید.



پاسخ:

یک ترتیب توپولوژیکی برای ترتیب جزئی داده شده به صورت زیر است:



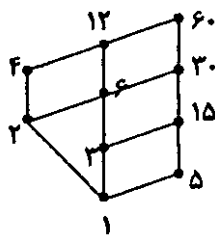
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
---	---	---	---	---	---	---	---

۱۹- نمودار هاس مجموعه با ترتیب جزئی زیر را رسم کنید.

$$(A, R) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60\}, |)$$

پاسخ:

نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده به صورت زیر است:



۲۰- در مثالهای زیر:

(ب) تمامی کرانه‌های پایینی

(الف) تمامی کرانه‌های بالایی

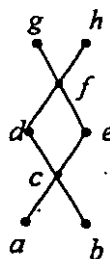
(د)  $GLB$

(ج)  $LUB$

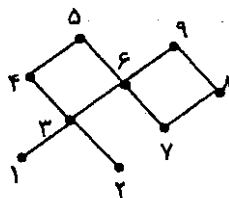
را برای مجموعه  $B$ ، در صورت وجود، پیدا کنید.

۱.  $B = \{4, 6, 12\}$  و  $(\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}, |)$

۲.  $B = \{c, d, e\}$



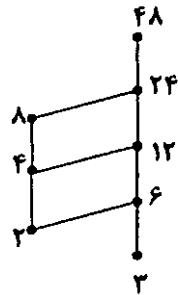
۳.  $B = \{2, 4, 6\}$



پاسخ:

(۱) برای سادگی ابتدا نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده را رسم می‌کنیم.

نمودار هاس مجموعه مرتب داده شده به صورت زیر است :



بنابراین برای مجموعه  $B = \{ 4, 6, 12 \}$  داریم :

الف) کرانه‌های بالایی :  $\{ 24, 48 \}$       ب) کرانه‌های پایینی :  $\{ 2 \}$

ج)  $LUB : 24$       د)  $GLB : 2$

۲ داریم :

الف) کرانه‌های بالایی :  $\{ f, g, h \}$       ب) کرانه‌های پایینی :  $\{ a, b, c \}$

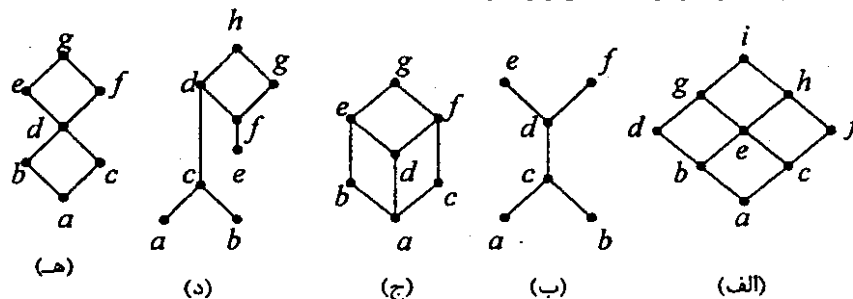
ج)  $LUB : f$       د)  $GLB : c$

۳

الف) کرانه بالایی :  $\{ 5 \}$       ب) کرانه پایینی :  $\{ 1, 2, 3 \}$

ج)  $LUB : 5$       د)  $GLB : 3$

۲۱- کدام یک از نمودارهای هاس زیر معرف یک شبکه است؟



پاسخ :

الف) شبکه است .

ب) شبکه نیست . زیرا مثلاً  $e \vee f$  وجود ندارد .

ج) شبکه است .

د) شبکه نیست . زیرا مثلاً  $a \wedge b$  وجود ندارد .

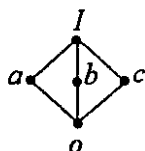


هـ) شبکه است.

۲۲- یک شبکه «مدور» گفته می‌شود هرگاه برای تمامی  $a, b, c$  ها،  $a \leq c$  منجر به  $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$  شود.

الف) نشان دهید که یک شبکه پخش‌پذیر، مدور است.

ب) نشان دهید که شبکه زیر که پخش‌ناپذیر است، مدور است.



پاسخ :

الف) فرض کنیم  $L$  یک شبکه پخش‌پذیر باشد و  $a, b, c \in L$ .

اگر  $a \leq c$  آنگاه  $a \vee c = c$ ،  $a \wedge c = a$ . بنابراین با توجه به پخش‌پذیری  $L$  و روابط اخیر خواهیم داشت :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

بنابراین  $L$  مدور است.

ب) کفایت برای شبکه داده شده، تمام حالتها را بررسی کنیم. برای تمامی عناصر  $x, y, z$  که به شبکه داده شده متعلق باشند رابطه  $x \leq z$  به سه حالت تقسیم می‌شود :

حالت اول :  $x = o$ ،  $z = I$ ،  $y = a$  یا  $b$  یا  $c$

$$(x \vee y) \wedge z = (o \vee y) \wedge I = y \wedge I = y$$

$$x \vee (y \wedge z) = o \vee (y \wedge I) = o \vee y = y$$

پس در این حالت

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

حالت دوم :  $x = o$ ،  $z = a$  یا  $b$  یا  $c$ ،  $y = I$

$$(x \vee y) \wedge z = (o \vee I) \wedge z = I \wedge z = z$$

$$x \vee (y \wedge z) = o \vee (I \wedge z) = o \vee z = z$$

در این حالت نیز

$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

حالت سوم :  $x = a$  یا  $b$  یا  $c$ ،  $z = I$ ،  $y = o$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \vee o) \wedge I = x \wedge I = x$$

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee (o \wedge I) = x \vee o = x$$

پس در این حالت نیز

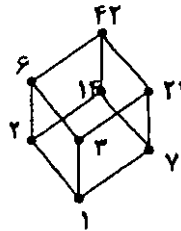
$$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

بنابراین مشبکه داده شده مدور است.

۲۳- مکمل هر یک از عناصر  $D_{12}$  را به دست آورید.

پاسخ:

عناصر  $D_{12}$  به صورت زیر هستند:



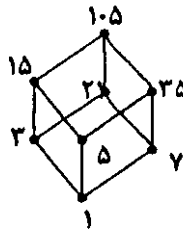
مکمل هر یک از عناصر  $D_{12}$  به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} (1)' = 12 \\ (2)' = 3 \\ (3)' = 4 \\ (6)' = 2 \\ (4)' = 3 \\ (12)' = 1 \end{cases}$$

۲۴- مکمل هر یک از عناصر  $D_{10}$  را به دست آورید.

پاسخ:

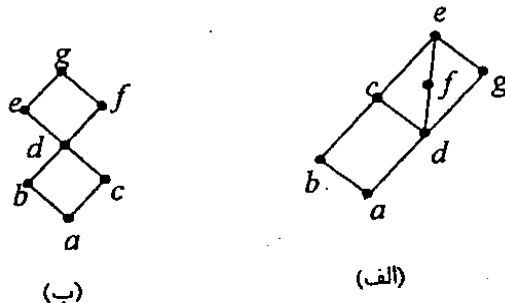
عناصر  $D_{10}$  به صورت زیر هستند:



مکمل هر یک از عناصر  $D_{10}$  نیز در زیر آمده است:

$$\begin{cases} (1)' = 10 \\ (2)' = 5 \\ (3)' = 6 \\ (5)' = 2 \\ (6)' = 3 \\ (10)' = 1 \end{cases}$$

۲۵- در هر کدام از شبکه‌های زیر، نشان دهید که کدام یک بخش‌پذیر و کدام یک متمم دار هستند.



پاسخ:

با توجه به قضیه ۴-۱۳ شبکه (الف) بخش‌ناپذیر و (زیر شبکه  $\{c, d, e, f, g\}$  را در نظر بگیرید) شبکه (ب) بخش‌پذیر است. همچنین در (الف) داریم:  $O=a$ ,  $I=e$ . روشن است عنصر  $c$  دارای متمم نمی‌باشد. در شبکه (ب) داریم:  $O=a$ ,  $I=g$ . روشن است عنصر  $e$  دارای متمم نیست. بنابراین هیچکدام از شبکه‌های داده شده متمم دار نیستند.

۲۶- نشان دهید که اگر  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  باشد که در آن  $p_i$  ها اعداد اول و متمایز از هم هستند، آنگاه  $D_n$  یک جبر بول است.

پاسخ:

بازای هر  $1 \leq i \leq j \leq k$  روشن است  $p_i p_{i+1} \dots p_j = d$  یک مقسوم‌علیه  $n$  است. همچنین روشن است تمام مقسوم‌علیه‌های  $n$  بجز ۱ به صورت فوق هستند. تابع  $f: D_n \rightarrow B_k$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(1) = \underbrace{0 \dots 0}_{-k \text{ مرتبه}}$$

$$f(d) = b_1 b_2 \dots b_k$$

که در آن

$$b_i = \begin{cases} 1 & p_i | d \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

به عنوان مثال :

$$f(p_1) = \underbrace{10 \dots 0}_{-k-1 \text{ مرتبه}}, \quad f(p_1 p_2) = \underbrace{011 \dots 0}_{-k-2 \text{ مرتبه}}$$

$$f(p_1 p_2 \dots p_k) = \underbrace{11 \dots 1}_{-k \text{ مرتبه}}$$

با تعریف فوق روشن است  $f$  یکریختی است. بنابراین  $D_n$  یک جبر بول است.  
۲۷- نشان دهید که اگر  $n$  عدد صحیح و مثبتی باشد که  $p^2 | n$ ، آنگاه  $D_n$  یک جبر بول نیست ( $p$  یک عدد اول است).

پاسخ :

فرض کنیم  $n = p_1^2 p_2 \dots p_k$  که در آن  $p_i$  ها اعداد اول متمایز هستند.

به استقرا ثابت می کنیم  $2^k < |D_n| < 2^{k+1}$

۱. مبنای استقرا: اگر  $n = p_1^2$  آنگاه مقسوم علیه های  $n$  عبارتند از

$$1, p_1, p_1^2$$

پس در این حالت  $2^1 < |D_n| < 2^2$

۲. فرض استقرا: فرض کنید که برای  $k$  دلخواه به طوریکه  $n = p_1^2 p_2 \dots p_k$  و  $p_i$  ها اعداد اول متمایز باشند داشته باشیم:

$$2^k < |D_n| < 2^{k+1}$$

۳. مرحله استقرا. فرض کنید  $n = p_1^2 p_2 \dots p_k p_{k+1}$ ، عدد  $m = p_1^2 p_2 \dots p_k$  را در نظر بگیرید. فرض کنیم  $d_1, d_2, \dots, d_r$  مقسوم علیه های  $m$  باشند. در این صورت مقسوم علیه های  $n$  به صورت زیر خواهد بود:

$$d_1, d_2, \dots, d_r, d_1 p_{k+1}, d_2 p_{k+1}, \dots, d_r p_{k+1}$$

پس  $|D_n| = 2 |D_m|$ ، اما بنا به فرض استقرا داریم:

$$2^k < |D_m| < 2^{k+1}$$

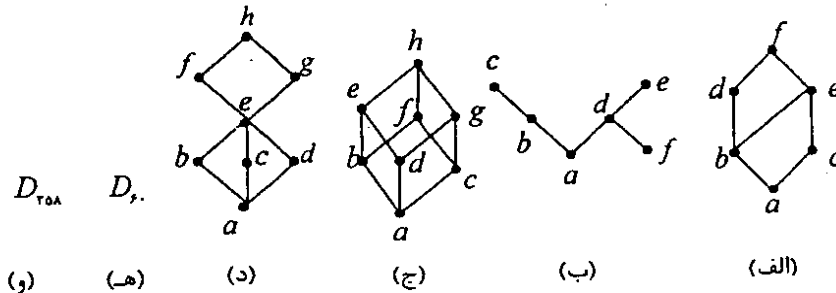
پس  $2^{k+1} < |D_n| < 2^{k+2}$

بنابراین تعداد عناصر  $D_n$  به صورت توانی از ۲ نمی باشد. اما می دانیم به ازای هر  $n$ ،  $|B_n| = 2^n$ ، و اگر مجموعه ای با  $B_n$  یکریخت باشد باید تعداد عناصر آن مجموعه نیز به صورت  $2^n$  باشد. از اینکه عناصر  $D_n$  به صورت توان ۲ نمی باشد. پس  $D_n$  نمی تواند با هیچکدام از  $B_n$  ها یکریخت باشد در نتیجه  $D_n$  جبر بول نیست.

در حالت کلی اگر  $p^2 | n$ ، آنگاه مانند روش بالا می توان ثابت کرد که  $D_n$  جبر بول نیست.

تذکر: اگر تعداد عناصر مجموعه‌ای مانند  $A$ ، به صورت  $|A| = 3^n$  باشد نمی‌توان نتیجه گرفت  $A$  جبر بول است. اما اگر  $|A| \neq 3^n$  آنگاه می‌توان حکم کرد که  $A$  جبر بول نیست.

۲۸- کدام یک از نمودارهای هاس زیر معرف یک جبر بول است؟



پاسخ:

(الف) نمودار داده شده با نمودار  $D_7$  که در صفحه ۱۴۴ کتاب درسی آمده است یکرخت می‌باشد. اما  $2^7 \nmid 20$ ، لذا با توجه به تمرین ۲۷ نمودار هاس (الف) جبر بول نمی‌باشد.

(ب) نمودار داده شده دارای ۶ عنصر می‌باشد، لذا نمی‌تواند با  $B_n$  (بازای یک  $n$ ) یکرخت باشد. زیرا هر  $B_n$  دارای  $2^n$  عنصر است.

(ج) نمودار داده شده با نمودار هاس  $D_7$  که در صفحه ۱۴۴ کتاب درسی آمده است، یکرخت می‌باشد. از طرفی  $2^7 = 2 \times 3 \times 5 = 30$ ، لذا با توجه به تمرین ۲۶،  $D_7$  با  $B_7$  یکرخت می‌باشد.

(د) با توجه به قضیه ۴-۱۳، نمودار داده شده پخشی نیست. (زیرا شبکه  $\{a, b, c, d, e\}$  را در نظر بگیرید.) بنابراین نمودار داده شده جبر بول نمی‌باشد.

(ه) داریم  $2^7 \nmid 60$ ، لذا با توجه به تمرین ۲۷،  $D_7$  جبر بول نمی‌باشد.

(و) داریم  $2^{179} = 2 \times 358$ ، بنابراین با توجه به تمرین ۲۶،  $D_{358}$  جبر بول است.

۲۹- نشان دهید که در یک جبر بول برای هر  $a, b, c$  داریم:

$$b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b \quad \text{الف}$$

$$(a \vee c) \wedge (b' \vee c)' = (a' \vee b) \wedge c' \quad \text{ب}$$

پاسخ :

با توجه به خواص جبر بول داریم :

(الف)

$$\begin{aligned} b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) &= b \wedge (a \vee (a' \wedge I)) \\ &= b \wedge (a \vee a') \\ &= b \wedge I \\ &= b \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} ((a \vee c) \wedge (b' \vee c))' &= (a \wedge b') \vee c' \\ &= (a \wedge b')' \wedge c' \\ &= (a' \vee b) \wedge c' \end{aligned}$$

۳۰- الف) جدول درستی عبارت بولی  $p(x, y, z) = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$  را تشکیل دهید.

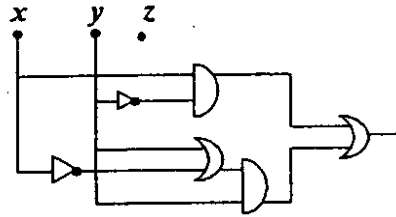
ب) نمودار منطقی عبارت مزبور را رسم کنید.

پاسخ :

(الف)

x	y	z	$(x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$			
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱
			۱	۴	۳	۲

ب) نمودار منطقی عبارت داده شده به صورت زیر است :



۳۱- نقشه کارنو را برای هر کدام از توابع زیر رسم کرده و  $dnf$  هر کدام از آنها را بدست آورید.

$x$	$y$	$z$	$w$	$f(x,y,z,w)$	$x$	$y$	$z$	$f(x,y,z)$	$x$	$y$	$f(x,y,z)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	(ب)				(الف)		
۱	۰	۰	۱	۰							
۱	۰	۱	۰	۰							
۱	۰	۱	۱	۱	(ج)						
۱	۱	۰	۰	۰							
۱	۱	۰	۱	۰							
۱	۱	۱	۰	۱							
۱	۱	۱	۱	۰							
۱	۱	۱	۱	۱							

پاسخ :

الف) نقشه کارنو عبارت بولی داده شده به صورت زیر است :

	$y'$	$y$
$x'$	۱	۰
$x$	۰	۱

$dnf$  عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y') \vee (x \wedge y)$$

ب) نقشه کارنو تابع بولی داده شده به صورت زیر است :

	$y'$		$y$	
$x'$	۱	۱	۰	۰
$x$	۱	۰	۰	۱
	$z$		$z'$	

$dnf$  عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z')$$

ج) نقشه کارنو تابع بولی داده شده به صورت زیر است :

	$z'$		$z$	
$x'$	۰	۰	۰	۱
	۰	۰	۰	۱
$x$	۰	۰	۱	۱
	۰	۰	۱	۰
	$w$		$w'$	

$dnf$  عبارت فوق نیز به صورت زیر است :

$$(x' \wedge y' \wedge z \wedge w') \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w)$$

$$\vee (x \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y \wedge z \wedge w)$$

۳۲- گزاره‌هایی که جدول درستی آنها در زیر ارائه شده است را به صورت  $dnf$  بنویسید.

$p$	$q$	$r$	$Q(p,q,r)$
$T$	$T$	$T$	$F$
$T$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$T$	$F$
$T$	$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

(ب)

$p$	$q$	$r$	$Q(p,q,r)$
$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$



پاسخ:

الف) داریم:

$$S(P) = \{(T, T, T), (T, F, T), (F, T, T)\}$$

بنابراین  $dnf$  عبارت داده شده به صورت زیر است:

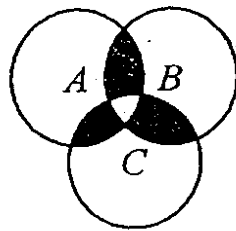
$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q' \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r)$$

ب) داریم:

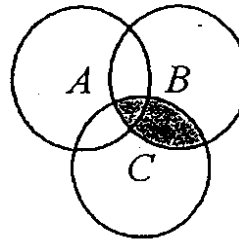
$$S(Q) = \{(F, T, T), (F, T, F)\}$$

بنابراین  $dnf$  عبارت داده شده به صورت زیر است:

$$(p' \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r')$$

۳۳- مجموعه‌های نشان داده شده در نمودارهای ون زیر را به صورت اجتماعی از اشتراک مجموعه‌های  $A, B, C$  بنویسید.

(ب)



(الف)

پاسخ:

الف) ناحیه هاشور زده برابر است با  $B \cap C$ ، از طرفی می‌دانیم  $A \cup A' = U$ ، که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. پس:

$$\begin{aligned} \text{ناحیه هاشور زده} &= B \cap C = (B \cap C) \cap (A \cup A') \\ &= (B \cap C \cap A) \cup (B \cap C \cap A') \end{aligned}$$

ب) داریم:

$$\text{ناحیه هاشور زده} = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

تذکر: ناحیه‌های فوق را می‌توان با استفاده از جدول درستی نیز پیدا کرد. ناحیه هاشور زده را  $T$  و بقیه ناحیه‌ها را  $F$  در نظر می‌گیریم. برای حالت الف، داریم:

$A$	$B$	$C$	$P(A,B,C)$
$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$T$	$F$
$T$	$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

به عنوان مثال، حالت  $A=T, B=T, C=T$ ، به منزله  $A \cap B \cap C$  است. اگر  $A \cap B \cap C$  هاشور زده باشد، آنگاه  $P=T$ ، در غیر اینصورت  $P=F$  است. به همین ترتیب حالت  $A=T, B=T, C=F$  به منزله  $A \cap B \cap C'$  می‌باشد و الی آخر. حال داریم:

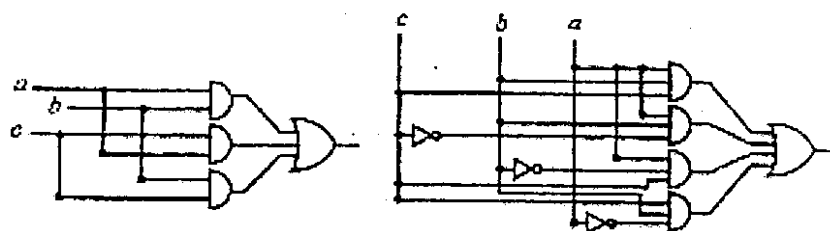
$$S(P) = \{(T, T, T), (F, T, T)\}$$

بنابراین ناحیه هاشور زده معادل است با:

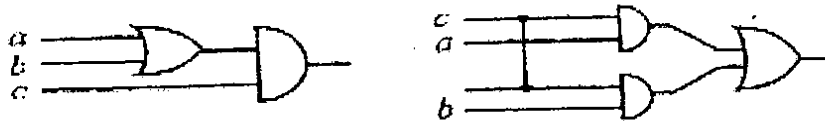
$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

حالت (ب) نیز مانند (الف) می‌تواند به کمک جدول درستی حل شود.

۳۴- نشان دهید که مدارهای زیر معادل هستند.



(الف)



(ب)

پاسخ:

الف) مدار سمت راست نشان دهنده عبارت زیر است:

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c)$$

و مدار سمت چپ نشان دهنده عبارت زیر است:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

کافیست نشان دهیم دو عبارت بالا، معادل هستند. همواره داریم:

$$(a \wedge b) = ((a \wedge b) \wedge (c' \vee c)) = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$(a \wedge c) = ((a \wedge c) \wedge (b' \vee b)) = (a \wedge c \wedge b') \vee (a \wedge c \wedge b) \\ = (a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$(b \wedge c) = ((b \wedge c) \wedge (a' \vee a)) = (b \wedge c \wedge a') \vee (b \wedge c \wedge a) \\ = (a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

بنابراین،

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ = [(a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c)] \vee [(a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)] \vee [(a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)] \\ = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c)$$

بنابراین، دو عبارت مورد بحث معادل هستند. در نتیجه مدارهای داده شده در (الف) معادل می‌باشند.

ب) مدار سمت راست نشان دهنده عبارت زیر است:

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

همچنین مدار سمت چپ نشان دهنده عبارت زیر است:

$$(a \vee b) \wedge c$$

از طرفی داریم :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

پس ، مدارهای داده شده معادل می باشند .

۳۵- هر کدام از عبارات بولی زیر را ساده کنید.

(الف)

$$(w \wedge x' \wedge z') \vee (w \wedge y') \vee (w' \wedge y) \vee (w' \wedge z) \vee (w' \wedge x)$$

(ب)

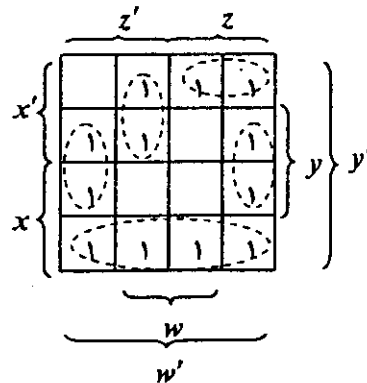
$$(x \wedge y \wedge z \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge w') \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w) \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge w') \vee (w' \wedge z')$$

(ج)

$$(x \vee y)' \vee z \vee (x \wedge ((y \wedge z) \vee (y' \wedge z')))$$

پاسخ :

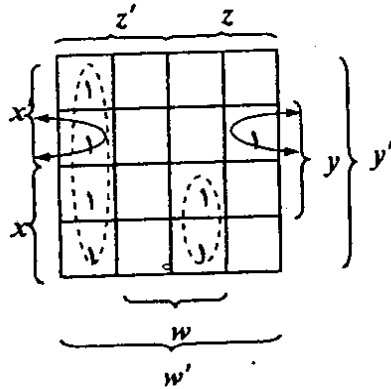
(الف) نقشه کارنوی عبارت داده شده را رسم می کنیم :



بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر ساده می شود :

$$(x \wedge y') \vee (w' \wedge y) \vee (z \wedge y') \wedge (z' \wedge x' \wedge w)$$

ب) نقشه کارنوی عبارت داده شده به صورت زیر است:



بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر ساده می شود:

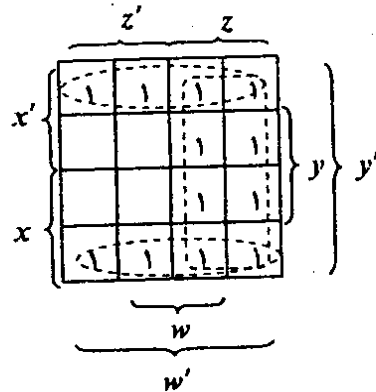
$$(w' \wedge z') \vee (x \wedge z \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge w')$$

ج) ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$(x \vee y)' \vee z \vee (x \wedge ((y \wedge z) \vee (y' \wedge z')))$$

$$= (x' \wedge y') \vee z \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z')$$

بنابراین ، نقشه کارنوی عبارت داده شده به صورت زیر است:



بنابراین ، عبارت داده شده به صورت زیر خلاصه می شود:

$$z \vee y'$$