حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

گردآورنده:

Pnu-Soal.ir

فصل اوّل

تمرینات فصل اول

۱- گزاره‌های زیر مفروض‌اند :

p : « گزارهٔ q دروغ است».

q : « گزارهٔ p راست است».

آیا گزارهٔ p راست است ؟ چرا ؟

پاسخ :

درستی یا نادرستی عبارتهایی مانند عبارتهای بالا را نمی‌توان تعیین کرد . چرا که اگر p راست باشد ، آنگاه q دروغ است . بنابراین جملهٔ « گزاره p راست است » دروغ می‌باشد . پس p دروغ است و این متناقض با راست بودن p است.

به همین ترتیب اگر p دروغ باشد آنگاه گزاره q درست است . بنابراین جمله « گزاره p راست است» درست می‌باشد . پس p درست است و این متناقض با دروغ بودن p است . پس در هر حالت به تناقض می‌رسیم .

۲- کدام یک از عبارات زیر ، گزاره و کدام یک گزاره نیستند ؟ جوابهای خود را توضیح دهید.

(الف) جمعیت ایران ، ۸۰ میلیون نفر است .

(ب) در نیمکرهٔ شمالی ، تیرماه در فصل زمستان قرار دارد .

(ج) فیل‌ها ، حیوانات باهوشی هستند .

(د) x بزرگتر از y است .

(هـ) خداحافظ علی !

پاسخ :

گزاره یک جمله خبرای است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو.

بنابراین

الف) یک جمله خبری است . پس ، یک گزاره است .

ب) یک جمله خبری است که دروغ می‌باشد . پس ؛ یک گزاره (دروغ)می‌باشد.

ج) یک جمله خبری است . پس ، یک گزاره می‌باشد.

د) چون مقدار x،y مشخص نیست لذا عبارت مزبور یک گزاره نمی‌باشد. (عبارت « x بزرگتر y است » یک گزاره‌نما می‌باشد.)

هـ) جمله خبری نیست ، لذا گزاره نمی‌باشد .

۳- گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید :

p : یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است.

q : یک کلمه دارای ۲ بایت است .

r : یک بیت مساوی صفر و یا یک است .

گزاره‌های نمادین زیر را به زبان فارسی نوشته و راست یا دروغ بودن هر کدام را مشخص کنید.

(الف) $p \wedge q$ (ب) $p \vee q$ (ج) $\sim p$ (د) $\sim(p \wedge q)$

(هـ) $\sim p \wedge \sim q$ (و) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim (p \wedge r)]$

پاسخ :

الف)

$p \wedge q$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است و یک کلمه دارای ۲ بایت است.

گزاره‌های q،p دروغ و گزاره r راست است (یک بایت معمولاً از ۸ بیت تشکیل شده و یک کلمه از تعداد متناهی بایت تشکیل می‌شود.)پس $p \wedge q$ دروغ است .

ب)

$p \vee q$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده یا یک کلمه دارای ۲ بایت است.

چون q،p هر دو دروغ هستند ، پس $p \vee q$ نیز دروغ است .

ج)

$\sim p$: چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است .

چون p دروغ است ، پس نقیض آن ، $\sim p$ راست است .

د)

$\sim (p \wedge q)$:چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و یک کلمه دارای ۲ بایت است.

در (الف) دیدیم که $p \wedge q$ دروغ است.پس نقیض آن ، $\sim (p \wedge q)$ ، راست است .

هـ)

$\sim p \wedge \sim q$: چنین نیست که یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و چنین نیست که یک کلمه دارای ۲ بایت است.

با توجه به اینکه $\sim p$,$\sim q$ راست هستند ، پس $\sim p \wedge \sim q$ نیز راست است.

و) $[(p\wedge q)\vee r]\wedge[\sim(p\wedge r)]$: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و یک کلمه دارای ۲ بایت است ، یا یک بیت مساوی صفر و یک است ؛ اما در عین حال چنین نیست که هم یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده و هم یک بیت مساوی صفر یا یک باشد .

برای بررسی راستی یا دروغ بودن گزاره ، ابتدا دو گزاره $[(p\wedge q)\vee r]$ و $[\sim(p\wedge r)]$ را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم .

$[(p\wedge q)\vee r]$: $p\wedge q$ دروغ اما r راست است پس گزاره $[(p\wedge q)\vee r]$ راست است .

$[\sim(p\wedge r)]$: p دروغ و r راست است . لذا $p\wedge r$ دروغ و درنتیجه $[\sim(p\wedge r)]$ راست است .

حال ، از اینکه $[(p\wedge q)\vee r]$ و $\sim(p\wedge r)$ هر دو راست هستند ، نتیجه می‌شود که $[(p\wedge q)\vee r]\wedge[\sim(p\wedge r)]$ راست است .

۲- جدول درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تشکیل دهید.

(الف) $\sim p\wedge q$ (ب) $p\vee\sim q$ (ج) $[(p\vee r)\wedge(q\vee r)]\wedge[\sim p\vee\sim r]$

پاسخ :

الف)

p	q	$\sim$	p	$\wedge$	q
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F
		۱		۲	

ب)

p	q	p	$\vee$	$\sim$	q
T	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F
			۲	۱	

ج)

p	q	r	$[(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)]$	$\wedge$	$[\sim$	p	$\vee$	$\sim$	$r]$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	T	T	F
				۱		۳		۲		۷	۴		۶	۵	

۵- کدام یک از گزاره‌های زیر ، راستگو است ؟

الف) $\sim(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ ب) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

پاسخ :

جدول درستی هر کدام را تشکیل می‌دهیم . اگر در ستون نهایی ، هم عبارتهای T ، گزاره راستگو و در غیر اینصورت گزاره دروغگو است .

الف)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\vee$	$\sim$	$q)$
T	T	F	T	T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F
		۲		۱		۶	۳		۵	۴	

گزاره مورد بحث راستگو نیست . زیرا در ستون نهایی عبارت F وجود دارد .

ب)

p	q	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\wedge$	$q)$
T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
			۲	۱		۵	۳		۴	

گزاره مورد بحث راستگو نیست ، زیرا در ستون نهایی عبارت F وجود دارد.

۶- کدام یک از عبارات زیر هم ارز هستند ؟

الف) $p \vee q$ و $q \vee p$.

ب) $p \vee (q \vee r)$ و $(p \vee q) \vee r$.

ج) $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

د) $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee r$.

هـ) $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge r$.

و) $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

ز) $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$.

ح) $p \vee \sim (q \wedge r)$ و $(p \vee \sim q) \vee \sim r$.

پاسخ :

الف) با توجه با خاصیت جابجایی گزاره‌ها : $p \vee q \equiv q \vee p$

ب) با توجه به خاصیت شرکتپذیری گزاره‌ها : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ج) با توجه به خاصیت پخش پذیری گزاره‌ها : $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$

د) جدول درستی دو گزاره داده شده ، به صورت زیر است :

p	q	r	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	r
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F
				۱		۲	

p	q	r	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F
				۲		۱	

۹

در دو سطری که علامتگذاری شده ، گزاره‌ها هم ارزش نیستند . لذا ، دو گزاره هم ارز نمی‌باشند.

تذکر : ارزش نهایی هر گزاره در ستونی که زیر آن با عدد ۲ شماره‌گذاری شده است ، مشخص می‌شود .

هـ) جدول درستی گزاره‌های داده شده به صورت زیر است :

p	q	r	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	r
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F
				۱		۲	

p	q	r	p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F
				۲		۱	

در سطرهایی که علامت‌گذاری شده‌اند ، دو گزاره هم‌ارزش نمی‌باشند . لذا ، دو گزاره مورد بحث هم‌ارز نمی‌باشند.

و) بنا به خاصیت پخش‌پذیری گزاره‌ها : $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$

ز) با توجه به قوانین دمورگان : $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$

ح)

$(p \vee \sim q) \vee \sim r \equiv p \vee (\sim q \vee \sim r)$: خواص شرکتپذیری

$p \vee (\sim q \vee \sim r) \equiv p \vee \sim (q \wedge r)$: قانون دمورگان

$$\Rightarrow (p \vee \sim q) \vee \sim r \equiv p \vee \sim (q \wedge r)$$

۷- نشان دهید که دستورهای زبان برنامه‌نویسی پاسکال ارائه شده در زیر هم‌ارز هستند .

الف) $((n = ۷)\ or\ (a > ۵))and(x = ۰)$

$((n = ۷)\ and\ (x = ۰))\ \ or\ ((a > ۵)\ and\ (x = ۰))$

ب) $(n = ۷)\ or\ (\ not\ ((a \leq ۵)\ and\ (x = ۰)))$

$((n = ۷)\ or\ (a > ۵))\ or\ (x <> ۰)$

پاسخ :

الف) گزاره‌های p , q , r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$n = ۷ : p$

$a > ۵ : q$

$x = ۰\ : r$

در این صورت دستورهای داده شده بطور معادل به صورت زیر نوشته می‌شوند .

$(p \vee q) \wedge r$
$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

اما ، با توجه به خاصیت پخشپذیری گزاره‌ها ، دو گزاره بالا هم‌ارز هستند . پس دستورهای زبان پاسکال داده شده نیز هم‌ارز می‌باشند.

ب) p , q , r را مانند الف در نظر می‌گیریم . در این صورت دستورهای داده شده بطور معادل به صورت زیر نوشته می‌شوند :

$p \vee (\sim (\sim q \wedge r))$
$(p \vee q) \vee \sim r$

گزاره اول با توجه به قانون دمورگان هم‌ارز است با :

$p \vee (q \vee \sim r)$

حال با توجه به خواص شرکتپذیری گزاره‌ها ، گزاره حاصل نیز هم‌ارز است با :

$(p \vee q) \vee \sim r$

درنتیجه دستورهای داده شده نیز هم‌ارز می‌باشند .

۸- عبارات منطقی زیر به صورت ترکیبات فصلی از ترکیبات عطفی عبارات ساده ، بنویسید .

الف) $(x = ۰)$ and (not $(n = ۷)$ and $(a < ۵)$)

ب) $(x = ۰)$ or (not ($(n > ۷)$ or $(a = ۵)$))

ج) $(n = ۷)$ or (not ($(a \leq ۵)$ and $(x = ۰)$))

د) ($(n <> ۷)$ or $(x = ۰)$) and ($(a < ۵)$ or $(x = ۰)$)

پاسخ :

گزاره‌های p , q , r , s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p: $x = ۰$

q: $n = ۷$

r: $n > ۷$

s: $a < ۵$

t: $a = ۵$

در این صورت داریم :

الف) $p \wedge (\sim q \wedge s)$

ب) $p \vee [\sim (r \vee t)]$

ج) $q \vee [\sim ((s \vee t) \wedge p)]$

د) $(\sim q \vee p) \wedge (s \vee p)$

۹- نشان دهید که $p \to q$ هم‌ارز با گزاره‌های زیر است .

الف) $\sim p \vee q$ ب) $\sim q \to \sim p$ ج) $\sim (p \wedge \sim q)$

پاسخ :

جدول درستی هر چهار گزاره را تشکیل می‌دهیم :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الف)

p	q	$\sim$	p	$\vee$	q
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F
		۱		۲	

ب)

p	q	$\sim$	q	$\to$	$\sim$	p
T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F
		۱		۳	۲	

ج)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F
		۳		۲	۱	

با مقایسه جدول درستی هر چهار گزاره مشخص می‌شود که $p \to q$ با هر سه گزاره که در الف و ب و ج آمده است هم‌ارز می‌باشد.

۱۰- در هر یک از عبارات زیر مقدم و تالی را مشخص کنید .

(الف) برای رئیس جمهور شدن ، کافی است یک سیاستمدار بود.

(ب) برای رئیس جمهور شدن ، لازم است یک سیاستمدار بود.

(ج) شرط لازم برای درک علم کامپیوتر ، داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته است.

(د) این برنامه اجرا خواهد شد ، تنها اگر ، اشتباهی در تایپ کردن آن وجود نداشته باشد.

پاسخ :

گزاره $p \to q$ ، به طرق مختلف بیان می‌شود که معمول‌ترین آنها عبارتند از : « اگر p آنگاه q » ، « q اگر p » ، « p تنها اگر q » ،« p شرط کافی برای q است.» و« q شرط لازم برای p است.» که در همه عبارتها p مقدم و q تالی است.

الف)

مقدم : سیاستمدار بودن.

تالی : رئیس جمهور بودن .

ب)

مقدم : رئیس جمهور بودن.

تالی : سیاستمدار بودن .

ج)

مقدم : درک علم کامپیوتر.

تالی : داشتن دانش کافی در ریاضیات گسسته.

د)

مقدم : این برنامه اجرا خواهد شد .

تالی : اشتباهی در تایپ برنامه وجود نداشته باشد .

۱۱- جدول درستی هر یک از گزاره‌ها زیر را تشکیل دهید .

(الف) $[(p \to q) \wedge p] \to q$ (ب) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

(ج) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ (د) $(p \wedge \sim p) \to q$

پاسخ :

الف)

p	q	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$p]$	$\to$	q
T	T	[illegible]	T	[illegible]	T	[illegible]	T	[illegible]
T	F	[illegible]	F	[illegible]	F	[illegible]	T	[illegible]
F	T	[illegible]	T	[illegible]	F	[illegible]	T	[illegible]
F	F	[illegible]	T	[illegible]	F	[illegible]	T	[illegible]
			۱		۲		۳	

ب)

p	q	r	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	r
T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]
				۱		۲	

ج)

p	q	r	p	$\leftrightarrow$	$(q$	$\leftrightarrow$	$r)$
T	T	T	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
				۲		۱	

د)

p	q	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$p)$	$\rightarrow$	q
T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]
			۲	۱		۳	

۱۲- با استفاده از گزاره‌های دو شرطی، مشخص کنید که کدام یک از زوج گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند .

الف) $(p\wedge \sim q)\rightarrow r$ و $(p\rightarrow q)\rightarrow r$.

ب) $(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ و $(p\wedge q)\vee r$.

ج) $\sim p\rightarrow \sim q$ و $p\leftrightarrow q$.

د) $(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge \sim q)$ و $p\leftrightarrow q$.

پاسخ :

الف) جدول درستی $[(p\rightarrow q)\rightarrow r]\leftrightarrow[(p\wedge \sim q)\rightarrow r]$ را تشکیل می‌دهیم :

p	q	r	$[(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$r]$	$\leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$	$\rightarrow$	$r]$
T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
				۱		۲		۶		۴	۳		۵	

با توجه به جدول درستی فوق ، دو گزاره $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ و $(p\wedge \sim q)\rightarrow r$ هم‌ارز نیستند.

ب) جدول درستی $\left[(p\wedge q)\vee r\right]\leftrightarrow\left[(p\vee r)\wedge(q\vee r)\right]$ را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$r]$	$\leftrightarrow$	$[(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r)]$
T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
				۱		۲		۶		۳		۵		۴	

با توجه به جدول درستی فوق ، داریم :

$$(p\wedge q)\vee r\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)$$

ج) جدول درستی گزاره $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\rightarrow\sim q)$ را تشکیل می‌دهیم .

p	q	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	p	$\rightarrow$	$\sim$	$q)$
T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
			۱		۵	۲		۴	۳	

از جدول درستی بالا روشن است که دو گزاره مورد بحث هم‌ارز نیستند.

د) جدول درستی $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \left[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\right]$ را تشکیل می‌دهیم.

p	q	$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\wedge$	$\sim$	$q)]$
T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
			۶	.	۷		۱		۵	۲		۴	۳	

با توجه به جدول درستی فوق

$$(p \leftrightarrow q) \equiv \left[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\right]$$

۱۳- بدون استفاده از جدول درستی ، نشان دهید که قیاس‌های زیر معتبر هستند .

الف) p و $p \to q$ و $q \to r \vdash r$.

ب) $p \vee q$ و $\sim p \vdash q$.

ج) $p \wedge \sim q$ و $p \to r$ و $r \to (s \vee q) \vdash s$.

د) $p \leftrightarrow q$ و $\sim p \to r$ و $\sim r \vdash q$.

هـ) $p \vee q$ و $\sim q \vee r \vdash p \vee r$.

و) $p \leftrightarrow q$ و $q \leftrightarrow r \vdash p \leftrightarrow r$.

ز) p و $(p \wedge \sim q) \to \sim p \vdash p \to q$.

ح) p و q و $(p \wedge q) \to r \vdash r$.

پاسخ :

الف:

	گزاره‌ها	دلایل
۱	p	فرض
۲	$p \to q$	فرض
۳	q	قیاس استثنایی (۲و۱)
۴	$q \leftrightarrow r$	فرض
۵	r	قیاس استثنایی (۴و۳)

ب)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \vee q$	فرض
۲	$\sim p \to q$	هم‌ارز ۱
۳	$\sim p_{\circ}$	فرض
۴	q	قیاس استثنایی ۲و۳

ج)در صورت مسئله نتیجه اشتباهاً q تایپ شده که صورت صحیح آن s است . (توجه کنید که بنا به فرض $p \wedge \sim q$ صحیح است. پس $\sim q$ نیز صحیح بوده ، پس q نادرست است.)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \wedge \sim q$	فرض
۲	p	قیاس تخصیص ۱
۳	$\sim q$	قیاس تخصیص ۱
۴	$p \to r$	فرض
۵	r	قیاس استثنایی ۲و۴
۶	$r \to (s \vee q)$	فرض
۷	$s \vee q$	قیاس استثنایی ۵و۶
۸	$\sim q \to s$	هم‌ارز ۷
۹	s	قیاس استثنایی ۳و۸

د)

دلایل	گزاره‌ها	
فرض	$p \leftrightarrow q$	۱
قیاس تخصیص ۱	$p \to q$	۲
عکس نقیض ۲	$\sim q \to \sim p$	۳
فرض	$\sim p \to r$	۴
قیاس تعدی ۴و۳	$\sim q \to r$	۵
عکس نقیض ۵	$\sim r \to q$	۶
فرض	$\sim r$	۷
قیاس استثنایی ۶و۷	q	۸

هـ)

دلایل	گزاره‌ها	
فرض	$p \vee q$	۱
هم‌ارز ۱	$\sim p \to q$	۲
فرض	$\sim q \vee r$	۳
هم‌ارز ۳	$q \to r$	۴
قیاس تعدی ۲و۴	$\sim p \to r$	۵
نقیض دوگانه	$p \vee r$	۶

و)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \leftrightarrow q$	فرض
۲	$p \to q$	قیاس تخصیص ۱
۳	$q \to p$	قیاس تخصیص ۱
۴	$q \leftrightarrow r$	فرض
۵	$q \to r$	قیاس تخصیص ۴
۶	$r \to q$	قیاس تخصیص ۴
۷	$p \to r$	قیاس تعدی ۲و۵
۸	$r \to p$	قیاس تعدی ۳
۹	$p \leftrightarrow r$	قیاس عطف ۷و۸

ز)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	p	فرض
۲	$(p \wedge \sim q) \to \sim p$	فرض
۳	$p \to (\sim p \vee q)$	عکس نقیض ۲ و قانون دمورگان
۴	$\sim p \vee q$	قیاس استثنایی ۱و۳
۵	$p \to q$	هم‌ارز ۴

ح)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	p	فرض
۲	q	فرض
۳	$p \wedge q$	قیاس عطف ۱و۲
۴	$(p \wedge q) \to r$	فرض
۵	r	قیاس استثنایی ۳و۴

۱۴- استدلال‌های زیر را تحلیل کرده و بگویید کدام یک معتبر است ؟

(الف) اگر ماشین تازه‌ای بخرم ، زمستان قادر خواهم بود که به مشهد بروم. چون، زمستان به مشهد نمی‌روم ، ماشین تازه‌ای نخواهم خرید.

(ب) اگر کاری پیدا و سخت کار کنم، ترقی خواهم کرد. من ترقی نکرده‌ام، بنابراین، یا کار پیدا نکرده‌ام و یا سخت کار نکرده‌ام .

(ج) اگر کاری پیدا و سخت کار کنم ، ترقی خواهم کرد. من ترقی کرده‌ام ، بنابراین ، کاری، پیدا کرده‌ام.

(د) یا در درس ساختمانهای گسسته نمرهٔ عالی خواهم گرفت و یا قبول نخواهم شد . اگر قبول نشوم به خدمت سربازی خواهم رفت . نمرهٔ عالی گرفته‌ام ، بنابراین ، به خدمت سربازی نخواهم رفت .

(هـ) یا در درس ساختمانهای گسسته نمرهٔ عالی خواهم گرفت یا قبول نخواهم شد. اگر قبول نشوم به خدمت سربازی خواهم رفت . نمرهٔ متوسط گرفته‌ام ، بنابراین ، به خدمت سربازی خواهم رفت.

پاسخ :

الف) گزاره‌های q,p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

p: ماشین تازه‌ای می‌خرم .

q : زمستان به مشهد می‌روم .

حال باید درستی قیاس زیر را بررسی کنیم :

$$p \to q \ , \ \sim q \vdash \sim p$$

قیاس فوق نیز معتبر است، زیرا :

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \to q$	فرض
۲	$\sim q$	فرض
۳	$\sim p$	قیاس عکس ۲و۱

پس ، استدلال مورد بحث معتبر است.

ب) گزاره‌های r,q,p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p : کار پیدا می‌کنم.

q : سخت کار می‌کنم .

r : ترقی خواهم کرد.

حال اعتبار قیاس زیر را بررسی می‌کنیم :

$(p \wedge q) \rightarrow r$ و $\sim r \vdash \sim p \vee \sim q$

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$(p \wedge q) \rightarrow r$	فرض
۲	$\sim r$	فرض
۳	$\sim p \vee \sim q$	قیاس عکس (۲و۱)و قانون دمورگان

پس ، استدلال مورد بحث معتبر است .

ج) گزاره‌های r,q,p را مانند (ب) تعریف می‌کنیم. باید اعتبار قیاس زیر را بررسی کنیم.

$(p \wedge q) \rightarrow r$ و $r \vdash P$ *

برای اینکه نشان دهیم قیاس فوق معتبر نیست،کافیست با توجه به جدول درستی نشان دهیم که گزاره زیر یک گزاره راستگو نمی‌باشد .

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge r \rightarrow p$

p	q	r	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$r]$	$\wedge$	r	$\rightarrow$	p
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	T	T
[redacted]											
F	T	F	F	F	T	T	F	F	F	T	F
[redacted]											
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	T	F
				۱		۲		۳		۴	

با توجه به دو سطر نشان داده شده ، گزاره $\left[(p \wedge q) \to r\right] \wedge r \to p$ راستگو نمی‌باشد . پس قیاس* معتبر نیست . بنابراین استدلال (ج) معتبر نمی‌باشد.

د) گزاره‌های r,q,p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

p: در درس ساختمان گسسته نمره عالی خواهم گرفت .

q:قبول نخواهم شد.

r: به خدمت سربازی خواهم رفت .

حال اعتبار قیاس زیر را بررسی می‌کنیم :

$$p \vee q \ , \ q \to r \ , \ p \vdash \sim r$$

مانند (ج) می‌توان نشان داد که گزاره $\left[(p \vee q) \wedge (q \to r) \wedge p\right] \to \sim r$ راستگو نیست . بنابراین ، قیاس مورد نظر معتبر نمی‌باشد.

تذکر : استدلال (د) در صورتی معتبر است که گزاره زیر را نیز به استدلال اضافه کنیم:

اگر نمره عالی بگیرم ، به سربازی نخواهم رفت .

هـ)گزاره‌های r,q,p را مانند(د) تعریف کرده ، گزاره s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

s: نمره متوسط گرفته‌ام .

باید اعتبار قیاس زیر را بررسی کنیم :

$$p \vee q \ , \ q \to r \ , s \vdash r$$

مجدداً مانند (ج) می‌توان نشان داد که گزاره زیز راستگو نیست .

$$\left[(p \vee q) \wedge (q \to r) \wedge s\right] \to r$$

لذا ، استدلال موردبحث معتبر نمی‌باشد.

۱۵- جدول درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تشکیل دهید.

الف) $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

ب) $[\sim q \to \sim p] \to (p \to q)$

پاسخ :

الف)

p	q	r	$[p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r)]$	$\to$	$[(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)]$
T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
				۲		۱		۶		۳		۵		۴	

p	q	$[\sim$	q	$\to$	$\sim$	$p]$	$\to$	$(p$	$\to$	$q)$
T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
		۱		۳	۲		۵		۴	

۱۶- با فرض آنکه

p : « هوا خوب است».

q : « علی به کوه می‌رود».

گزاره‌های نمادین زیر را به زبان فارسی بنویسید :

(الف) $\sim q \to \sim p$ (ب) $p \wedge \sim q$ (ج) $p \leftrightarrow q$

پاسخ :

الف) اگر علی به کوه نرود آنگاه هوا خوب نبوده است .

ب)هوا خوب است و علی به کوه نمی‌رود .

ج) شرط لازم و کافی برای آنکه علی به کوه برود آنست که هوا خوب باشد.

۱۷- نشان دهید که اگر $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p \vdash q$ ، آنگاه

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \vdash (p \to q)$$

پاسخ :

گزاره r را به صورت $r \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ تعریف می‌کنیم . در این صورت کافیست نشان دهیم که اگر $r \wedge q \vdash q$ آنگاه $r \vdash (p \to q)$. به عبارتی باید نشان دهیم که گزاره زیر راستگو است :

$$[(r \wedge p) \to q] \to [r \to (p \to q)] \qquad *$$

جدول درستی گزاره فوق به صورت زیر است :

p	q	r	$[(r$	$\wedge$	$p)$	$\to$	$q]$	$\to$	$[r$	$\to$	$(p$	$\to$	$q)]$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
				۱		۲		۵		۴		۳	

بنابراین ، گزاره * راستگو بوده و حکم تمام است .

۱۸- ثابت کنید که استدلال زیر معتبر است :

- اگر علی در فرانسه زندگی نکند ، آنگاه نخواهد توانست فرانسه صحبت کند.
- علی نمی‌تواند ماشین کادیلاک براند.
- اگر علی در فرانسه زندگی کند ، آنگاه وی دوچرخه سواری خواهد کرد.
- یا علی فرانسه صحبت می‌کند ،یا کادیلاک می‌راند.

بنابراین ، علی دوچرخه سواری می‌کند.

پاسخ :

گزاره‌های s,r,q,p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p: علی در فرانسه زندگی می‌کند .

q : علی می‌تواند فرانسه صحبت کند .

r : علی می‌تواند ماشین کادیلاک براند .

s : علی دوچرخه سواری می‌کند .

کافیست نشان دهیم قیاس زیر معتبر است .

$$\sim p \to \sim q \ , \sim r \ , p \to s \ , q \vee r \vdash s$$

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$\sim p \to \sim q$	فرض
۲	$q \to p$	عکس نقیض ۱
۳	$q \vee r$	فرض
۴	$\sim r \to q$	هم‌ارز ۳
۵	$\sim r$	فرض
۶	q	قیاس استثنایی ۴و۵
۷	p	قیاس استثنایی ۲و۶
۸	$p \to s$	فرض
۹	s	قیاس استثنایی ۷و۸

لذا ، قیاس مورد بحث معتبر است .

۱۹- نشان دهید: $\sim r \to (s \to \sim t)$ ، $\sim r \vee w$ ، $\sim p \to s$ ، $\sim w \vdash t \to p$.

پاسخ:

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$\sim r \vee w$	فرض
۲	$\sim w \to \sim r$	هم‌ارز ۱
۳	$\sim w$	فرض
۴	$\sim r$	قیاس استثنایی ۲و۳
۵	$\sim r \to (s \to \sim t)$	فرض
۶	$s \to \sim t$	قیاس استثنایی ۴و۵
۷	$\sim p \to s$	فرض
۸	$\sim p \to \sim t$	قیاس تعدی ۷و۶
۹	$t \to p$	عکس نقیض ۸

۲۰- نتیجه‌ای برای مجموعه جملات زیر ارائه دهید:

- همهٔ مربع‌ها، مستطیل هستند.
- همهٔ مستطیل‌ها، متوازی‌الاضلاع هستند.
- همهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها، چهارضلعی هستند.

بنابراین ...؟

پاسخ:

همه مربع‌ها چهارضلعی هستند، زیرا:

$p(x)$: x مربع است.

$Q(x)$: (x) مستطیل است.

$R(x)$: x متوازی‌الاضلاع است.

$S(x)$: x چهارضلعی است.

با توجه به فرضهای مسئله باید نشان دهیم قیاس زیر معتبر است :

$$\forall x[P(x) \to Q(x)]$$
$$\forall x[Q(x) \to R(x)]$$
$$\forall x[P(x) \to S(x)]$$

$$\forall x[P(x) \to S(x)]$$

با استفاده از قیاس تعدی ، بسادگی می‌توان ثابت کرد قیاس بالا معتبر است .

۲۱- مشخص کنید که کدام یک از استنتاج‌های زیر معتبر است ؟

(الف) - هر موجود زنده ، یا گیاه است و یا حیوان .

- سگ علی ، موجود زنده‌ای است و گیاه نیست .

- همهٔ حیوانات ، قلب دارند .

بنابراین سگ علی ، قلب دارد .

(ب) - بعضی از سگ‌ها ، حیوان هستند .

- بعضی از گربه‌ها ، حیوان هستند .

بنابراین ، بعضی از سگ‌ها ، گربه هستند .

(ج) - همهٔ پدرها ، مذکر هستند .

- بعضی از دانشجویان ، پدر هستند .

بنابراین ، بعضی از دانشجویان ، مذکر هستند .

پاسخ :

الف) فرض کنیم :

$P(x)$: x موجود زنده است .

$Q(x)$: x گیاه است .

$R(x)$: x حیوان است .

$S(x)$: x قلب دارد .

ثابت می‌کنیم استنتاج (الف) معتبر است .

مراحل استنتاج در جدول زیر آمده است :

۱	$P(d) \wedge \sim Q(d)$	(سگ علی موجود زنده است و گیاه نیست) فرض
۲	$\forall x[P(x) \to (Q(x) \vee R(x))]$	فرض
۳	$P(d) \to (Q(d) \vee R(d)$	جهان لحظه‌ای ۲
۴	$P(d)$	قیاس تخصیص ۱
۵	$Q(d) \vee R(d)$	قیاس استثنایی ۳و۴
۶	$\sim Q(d) \to R(d)$	هم‌ارز ۵
۷	$\sim Q(d)$	قیاس تخصیص ۱
۸	$R(d)$	قیاس استثنایی ۶و۷
۹	$\forall x[R(x) \to S(x)]$	فرض
۱۰	$R(d) \to S(d)$	جهان لحظه‌ای ۹
۱۱	$S(d)$	قیاس استثنایی ۱۰و۹

ب)فرض کنیم

$:P(x)$ x سگ است .

$:Q(x)$ x گربه است .

$:R(x)$ x حیوان است .

فرضهای مسئله عبارتند از :

$$\exists x[P(x) \wedge R(x)]$$
$$\exists x[Q(x) \wedge R(x)]$$

روشن است از دو فرض فوق نمی‌توان گزاره $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ را استنتاج کرد.
بنابراین ، استنتاج (ب) معتبر نیست .

ج) فرض کنیم :

$:P(x)$ x پدر است .

$:Q(x)$ x مذکر است .

$:R(x)$ x دانشجو است .

نشان می‌دهیم استنتاج (ج) معتبر است .

مراحل استنتاج در جدول زیر آمده است :

۱	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	فرض
۲	$\exists x[R(x) \wedge P(x)]$	فرض
۳	$R(a) \wedge P(a)$	وجود لحظه‌ای ۲
۴	$P(a) \to Q(a)$	جهان لحظه‌ای ۱
۵	$P(a)$	قیاس تخصیص ۳
۶	$Q(a)$	قیاس استثنایی ۴و۵
۷	$R(a)$	قیاس تخصیص ۳
۸	$Q(a) \wedge R(a)$	قیاس عطف ۶و۷
۹	$\exists x[Q(x) \wedge R(x)]$	وجود لحظه‌ای ۸

۲۲- اگر جهان سخن ، مجموعه $U = \{-۱,۱,۲\}$ ، $P(x) : x^۲ < ۲$ ، $Q(x) : x > ۱$، درستی هر یک از گزاره‌های سوردار زیر را مشخص کنید .

الف) $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$.

ب) $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$.

ج) $\forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$.

د) $\exists x[\sim P(x) \vee Q(x)]$.

هـ) $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$.

و) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$.

ز) $\forall x[\sim P(x) \wedge Q(x)]$.

د) $\exists x[\sim P(x) \wedge Q(x)]$.

پاسخ :

الف) درست .

ب) درست . (اگر گزاره $\forall x\ P(x)$ درست باشد ، آنگاه $\exists x\ P(x)$ نیز قطعاً درست خواهد بود)

ج) نادرست . بازای $x = -۱$ داریم $-۱ < ۱$ ، $(-۱)^۲ < ۲$ بنابراین $p(-۱)$ درست و $Q(-۱)$ نادرست است . پس $\sim P(-۱) \vee Q(-۱)$ نادرست است . در نتیجه گزاره $\forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$ نادرست می‌باشد.

د)درست . $x = ۲$ مقدار وجودی سور وجودی مورد بحث است .

هـ) نـادرست. بازای $x = ۲$ ، $P(۲)$ نـادرست و $Q(۲)$ درسـت است . پس $P(۲) \wedge Q(۲)$ نادرست می‌باشد . پس ، بازای تمام عناصر U ، $P(x) \wedge Q(x)$ لزوماً درست نمی‌باشد .

و) نادرست . هیچ عنصری از U وجود ندارد که $P(x) \wedge Q(x)$ را به گزاره درست تبدیل کند .

(ز) نادرست . $x = -۱$ یک مثال نقض است .

(د) درست . بازای $x = ۲$ ، $\sim P(x) \wedge Q(x)$ به یک گزاره درست تبدیل می‌شود .

- ⊙ برای اثبات درستی $\forall x\, P(x)$ باید ثابت کنیم $P(x)$ بازای همه عناصر U به یک گزاره درست تبدیل می‌شود .
- ⊙ برای اثبات نادرستی $\forall x\, P(x)$ کافیست عنصری مانند $a \in U$ چنان بیابیم که $P(a)$ نادرست باشد .
- ⊙ برای اثبات درستی $\exists x\, P(x)$ کافیست عنصری مانند $a \in U$ چنان بیابیم که $P(a)$ درست باشد .
- ⊙ برای اثبات نادرستی $\exists x\, P(x)$ باید ثابت کنیم $P(x)$ بازای همه عناصر U به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود .

۲۳- نشان دهید که :

$$\forall x[P(x) \vee Q(x)] \vdash \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$$

پاسخ :

قواعد استنتاج در جدول زیر آمده است :

۱	$\forall x[P(x) \vee Q(x)]$	فرض
۲	$P(a) \vee Q(a)$	جهان لحظه‌ای ۱
۳	$\sim P(a) \to Q(a)$	هم‌ارز ۲
۴	$\exists x \sim P(x) \to \exists x Q(x)$	تعمیم وجودی ۳
۵	$\sim (\forall x P(x)) \to \exists x Q(x)$	هم‌ارز ۴
۶	$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$	هم‌ارز ۵

۲۴- نشان دهید که برای هر عدد صحیح n، عبارت $(۱۱)^{n+۲} + (۱۲)^{۲n+۱}$ بر ۱۳۳، بخش‌پذیر است.

پاسخ :

توضیح : حکم فوق برای هر عدد صحیح $n \leq ۰$ برقرار است .

۱. مبنای استقراء

$$P(۱) = (۱۱)^{۱+۲} + (۱۲)^{۲+۱} = ۳۰۵۹ = ۲۳ \times ۱۳۳$$

۲. فرض استقرا . فرض کنید که عبارت فوق به ازای $n=k$ بر ۱۳۳، بخش‌پذیر است ، به عبارت دیگر ، عدد مثبت و صحیح m وجود دارد به گونه‌ای که

$$(۱۱)^{k+۲} + (۱۲)^{۲k+۱} = ۱۳۳m$$

۳. مرحله استقرا.حال نشان می‌دهیم عبارت فوق بازای $n=k+۱$ نیز بر ۱۳۳، بخش‌پذیر است .

$$\begin{aligned}
۱۱^{k+۳} + ۱۲^{۲(k+۱)+۱} &= ۱۱^{k+۳} + ۱۲^{۲k+۳} \\
&= ۱۱^{k+۳} + (۱۳۳+۱۱)۱۲^{۲k+۱} \\
&= ۱۱\times ۱۱^{k+۲} + ۱۱\times ۱۲^{۲k+۱} + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱} \\
&= ۱۱(۱۱^{k+۲} + ۱۲^{۲k+۱}) + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱} \\
&= ۱۱(۱۳۳m) + ۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱} \\
&= ۱۳۳(۱۱m + ۱۲^{۲k+۱}) \\
&= ۱۳۳m'
\end{aligned}$$

۲۵- نشان دهید که برای هر $n \geq ۲$:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

پاسخ :

۱. مبنای استقرا . واضح است که برای $n = ۲$

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} > \sqrt{۲}$$

۲. فرض استقرا . فرض کنید که عبارت مورد بحث برای $n = k$ صحیح باشد . یعنی

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

۳. مرحله استقرا . به طرفین فرض استقرا $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم . خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

حال کافیست ثابت کنیم $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$. برای اثبات به روش بازگشتی عمل می‌کنیم . یعنی فرض می‌کنیم که عبارت $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ درست است . سپس با یک سری اعمال برگشت‌پذیر به یک عبارت بدیهی می‌رسیم . لذا داریم :

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k}+1>(\sqrt{k+1})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k}+1>k+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2+k}>k$$

چون $n\geq 2$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و جهت نامساوی عوض نمی‌شود :

$$\Rightarrow k^2+k>k^2$$

$$\Rightarrow k>0$$

می‌دانیم $k>2$، سپس عبارت حاصل یک رابطه بدیهی است . از اینکه تمام روابط بالا برگشت‌پذیر هستند، سپس رابطه $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ ثابت می‌شود . درنتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

و حکم تمام است .

۲۶- نشان دهید که برای هر عدد صحیح n :

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$$

پاسخ :

۱. مبنای استقرا . بدیهی است که $1^3=1^2$

۲. فرض استقرا . فرض کنیم حکم فوق بازای $n=k$ برقرار باشد :

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=(1+2+\ldots+k)^2$$

۳. مرحله استقرا . نشان می‌دهیم رابطه فوق بازای $n=k+1$ نیز برقرار است .

داریم :

$$\begin{aligned}[1+2+\dots+k+(k+1)]^2 &= (1+2+\dots+k)^2+2(1+2+\dots+k)(k+1)+(k+1)^2\\ &= 1^3+2^3+\dots+k^3+2\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)(k+1)+(k+1)^2\\ &= 1^3+2^3+\dots+k^3+k(k+1)^2+(k+1)^2\\ &= 1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^2(k+1)\\ &= 1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3\end{aligned}$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود .

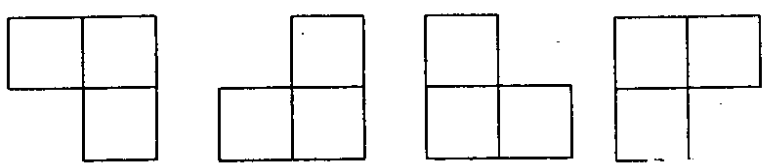
⊙ در سطر دوم اثبات بالا از فرض استقرا و از رابطه $1+2+\dots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ استفاده شده است .

۲۷- صفحهٔ شطرنجی را « ناقص» گوییم هرگاه یکی از خانه‌های آن را حذف کرده باشیم. نشان دهید که هر صفحهٔ شطرنج ناقص به اندازهٔ $2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ را می‌توان به وسیلهٔ مهره‌های L شکل که هر کدام از به هم چسبیدن سه مربع ، به اندازهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج ، به دست آمده‌اند ، پوشانید.

☜ **پاسخ :**

حکم فوق را با استقرا قوی ثابت می‌کنیم .

۱. مبنای استقرا . بازای $n=1$ صفحه شطرنج ناقص به یکی از صورتهای زیر است :

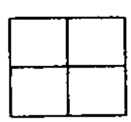


که در هر حالت حکم واضح است .

۲. فرض استقرای قوی : فرض کنیم حکم بازای هر $1 \leq i \leq k$ راست است .

۳. مرحلهٔ استقرای قوی . حال شطرنج ناقص $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ را در نظر می‌گیریم .

این صفحه را به خانه‌های چهارتایی به صورت زیر افراز می‌کنیم .



خانه‌ای که حذف شده است در یکی از این چهارتایی‌ها قرار می‌گیرد که بنا به مبنای استقرا می‌توان آنرا بوسیله یک مهره L پوشش داد. در این صورت یک چهارتایی به دست می‌آید که آنرا پوشش داده‌ایم . حال به افراز صفحه ناقص برمی‌گردیم و هر چهارتایی را به عنوان یک خانه واحد در نظر می‌گیریم . در این صورت یک صفحه $2^k \times 2^k$ خواهیم داشت که هر خانه این صفحه جدید که آنرا p' می‌نامیم معادل چهارخانه صفحه اصلی است که آنرا p می‌نامیم . اما در p یک خانه چهارتایی که متعلق به افراز بود را پوشش دادیم . بنابراین با حذف این چهارتایی . p' یک صفحه ناقص $2^k \times 2^k$ خواهد بود . که آنرا بنا به فرض استقرا می‌توان با مهره‌های به شکل L که از چسبیدن سه بلوک بدست آمده‌اند پوشش داد . اما هر بلوک یک خانه چهارتایی است . در زیر نشان داده‌ایم که یک بلوک به شکل L را چگونه می‌توان با خانه‌هایی به شکل L که از بهم چسبیدن سه خانه صفحه اصلی است پوشش داد :

		۴	۴
		۱	۴
۳	۱	۱	۲
۳	۳	۲	۲

بنابراین p را می‌توان با خانه‌های به شکل L که از بهم چسبیدن سه خانه به اندازه خانه‌های صفحه شطرنج است پوشش داد . بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۲۸- نشان دهید که گزاره‌های زیر راستگو هستند :

(الف) $\left[(p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r)\right] \vee ((\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r))$

(ب) $\left[\sim (p \wedge q) \to (\sim p \vee (\sim p \vee q))\right] \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

پاسخ :

الف) ابتدا توجه می‌کنیم که :

$$\begin{aligned} \sim (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r)) &\equiv p \vee \sim (\sim q \vee \sim r) \\ &\equiv p \vee (q \wedge r) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

لذا:

$$\begin{aligned} \left[(p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r))\right] &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad (1) \end{aligned}$$

از طرفی

$$((\sim p\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge \sim r))\equiv(\sim(p\vee q)\vee \sim(p\vee r))$$
$$\equiv\sim((p\vee q)\wedge(p\vee r)) \qquad (۲)$$

با جاگذاری ۱و۲ در گزاره داده شده خواهیم داشت :

$$[(p\vee q)\wedge \sim(\sim p\wedge(\sim q\vee \sim r))]\vee((\sim p\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge \sim r))$$
$$\equiv[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]\vee[\sim((p\vee q)\wedge(p\vee r))]$$

گزاره حاصل نیز بنا به خاصیت متمم (خاصیت ۷) راستگو است .

ب) ابتدا توجه می‌کنیم که $\sim p\vee(\sim p\vee q)\equiv\sim p\vee q$ ، بنابراین گزاره داده شده معادل است با :

$$[\sim(p\wedge q)\to(\sim p\vee q)]\leftrightarrow(\sim p\vee q)$$

جدول درستی گزاره فوق نیز به صورت زیر است :

p	q	$[\sim(p\wedge q)\to(\sim p\vee q)]$	$\leftrightarrow$	$(\sim p\vee q)$
T	T	[redacted]	T	[redacted]
T	F	[redacted]	T	[redacted]
F	T	[redacted]	T	[redacted]
F	F	[redacted]	T	[redacted]
		۲ ۱ ۵ ۳ ۴	۸	۶ ۷

پس گزاره داده شده ، یک گزاره راستگو است .

۲۹- نشان دهید که گزارهٔ زیر هم‌ارز گزارهٔ r است .

$$[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)$$

پاسخ :

داریم :

$$[\sim p\wedge(\sim q\wedge r)]\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge r)\equiv[(\sim p\wedge \sim q)\wedge r]\vee[r\wedge(p\vee q)]$$
$$\equiv[r\wedge \sim(p\vee q)]\vee[r\wedge(p\vee q)]$$
$$\equiv r\wedge[(p\vee q)\vee \sim(p\vee q)]$$
$$\equiv r$$

۳۰- آیا استنتاج‌های زیر معتبر هستند ؟

(الف) $p \vee q \quad , \quad p \to r \quad , \quad q \to s \vdash s \vee r$

(ب) $p \to q \ , \ (\sim q \vee r) \wedge \sim r \ , \sim(\sim p \wedge s) \vdash s$

(ج) $(p \to q) \to r \ , \ p \wedge s \ , \ q \wedge r \vdash r$

(د) $\sim q \to (r \to \sim s) \ , \sim q \vee t \ , \ \sim p \to r \ , \ \sim t \vdash s \to p$

(هـ) $(p \to q) \wedge (p \to r) \ , \ \sim (p \wedge r)$ و $(s \vee p) \vdash s$

(و) $p \vee q \ , q \to r \ , p \to s \ , \sim s \vdash r \wedge (p \wedge q)$

پاسخ :

اعتبار استنتاج (الف) در جدول زیر بررسی شده است.

	گزاره	دلایل
۱	$p \vee q$	فرض
۲	$\sim q \to p$	هم‌ارز ۱
۳	$p \to r$	فرض
۴	$\sim q \to r$	قیاس تعدی ۲و۳
۵	$\sim r \to q$	عکس نقیض ۴
۶	$q \to s$	فرض
۷	$\sim r \to s$	قیاس تعدی ۵و۶
۸	$r \vee s$	هم‌ارز ۷

ب) استنتاج داده شده معتبر نیست. زیرا :

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$(\sim q \vee r) \wedge \sim r$	فرض
۲	$\sim r$	قیاس تخصیص ۱
۳	$(\sim q \vee r)$	قیاس تخصیص ۱
۴	$\sim r \rightarrow \sim q$	هم‌ارز ۳
۵	$\sim q$	قیاس استثنایی ۲و۴
۶	$p \rightarrow q$	فرض
۷	$\sim q \rightarrow \sim p$	عکس نقیض ۶
۸	$\sim p$	قیاس استثنایی ۷و۵
۹	$\sim (\sim p \wedge s)$	فرض
۱۰	$p \vee \sim s$	هم‌ارز ۹
۱۱	$\sim p \rightarrow \sim s$	هم‌ارز ۱۰
۱۲	$\sim s$	قیاس استثنایی ۸ و۱۱

ج) درستی استنتاج داده شده در جدول زیر آمده است .

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$q \wedge r$	فرض
۲	r	قیاس تخصیص ۱

د) اعتبار استنتاج داده شده در جدول زیر آمده است .

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$\sim q \vee t$	فرض
۲	$\sim t \to \sim q$	هم‌ارز ۱
۳	$\sim t$	فرض
۴	$\sim q$	قیاس استثنایی ۲و۳
۵	$\sim q \to (r \to \sim s)$	فرض
۶	$r \to \sim s$	قیاس استثنایی ۴و۵
۷	$\sim p \to r$	فرض
۸	$\sim p \to \sim s$	قیاس تعدی ۷و۶
۹	$s \to p$	عکس نقیض ۸

هـ) اعتبار استنتاج داده شده در جدول زیر آمده است .

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	فرض
۲	$p \to r$	قیاس تخصیص ۱
۳	$\sim (p \wedge r)$	فرض
۴	$\sim p \vee \sim r$	هم‌ارز ۳
۵	$r \to \sim p$	هم‌ارز ۴
۶	$p \to \sim p$	قیاس تعدی ۲و۵
۷	$\sim p$	هم‌ارز ۶
۸	$s \vee p$	فرض
۹	$\sim p \to s$	هم‌ارز ۸
۱۰	s	قیاس استثنایی ۷و۹

و)

	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \to s$	فرض
۲	$\sim s \to \sim p$	عکس نقیض ۱
۳	$\sim s$	فرض
۴	$\sim p$	قیاس استثنایی ۲و۳

چون $\sim p$ درست است ، پس p نادرست بوده لذا $r \wedge (p \wedge q)$ نادرست می‌باشد . پس ، استنتاج داده شده معتبر نیست .

۳۱- جدول درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تشکیل دهید .

الف) $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

ب) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

ج) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\sim q \to s)$

د) $[p \vee (q \to (r \wedge \sim p)] \leftrightarrow q \vee \sim s$

پاسخ :

الف)

p	q	r	$[\sim$	p	$\wedge$	$(\sim$	q	$\wedge$	$r)]$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r)$
T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]
			۳		۴	۲		۱		۷		۵		۸		۶	

ب)

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	T	T	F	T	F	T	T	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F
			۱		۹	۲		۳		۱۰		۵	۴		۱۱	۶		۸	۷	

ج)

p	q	r	s	$(p$	$\leftrightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(\sim$	q	$\rightarrow$	$s)$
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T	T	F	T	T	F
T	T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
					۱		۴	۲		۳	

د)

p	q	r	s	$[p$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$(r$	$\wedge$	$\sim$	$p))]$	$\leftrightarrow$	$(q$	$\vee$	$\sim$	$s)$
T	T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T	F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	T	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	T	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
F	F	F	F	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
					۴		۳		۲	۱		۷		۶	۵	

۳۲- بدون استفاده از جدول درستی نشان دهید که گزاره

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim(\sim p \wedge(\sim q \vee \sim r))\right] \vee(\sim p \wedge \sim q) \vee(\sim p \wedge \sim r)$$

یک راستگو است .

پاسخ :

داریم :

$$\begin{aligned}(\sim p \wedge \sim q) \vee(\sim p \wedge \sim r) &\equiv \sim p \wedge(\sim q \vee \sim r)\\ &\equiv \sim p \wedge \sim(q \wedge r)\\ &\equiv \sim(p \vee(q \wedge r)) \qquad (1)\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}\sim(\sim p \wedge(\sim q \vee \sim r) &\equiv \sim(\sim p \wedge \sim(q \wedge r))\\ &\equiv p \vee(q \wedge r)\\ &\equiv(p \vee q) \wedge(p \vee r)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\left[(p \vee q) \wedge \sim(\sim(\sim q \vee \sim r))\right] &\equiv(p \vee q) \wedge\left[(p \vee q) \wedge(p \vee r)\right]\\ &\equiv(p \vee q) \wedge(p \vee r)\\ &\equiv p \vee(q \wedge r) \qquad (2)\end{aligned}$$

با جاگذاری (۱)و(۲) در گزاره اصلی ، گزاره راستگوی

$$\begin{aligned}&\left[(p \vee q) \wedge \sim(\sim p \wedge(\sim q \vee \sim r))\right] \vee(\sim p \wedge \sim q) \vee(\sim p \wedge \sim r)\\ &\equiv(p \vee(q \wedge r)) \vee \sim(p \vee(q \wedge r))\end{aligned}$$

به دست می‌آید . بنابراین ، گزاره اصلی راستگو است .

۳۳- نشان دهید که استنتاج زیر معتبر نیست.

- اگر علی به دلیل بیماری در کلاس‌ها شرکت نکند ، آنگاه از دانشگاه اخراج خواهد شد .
- اگر علی از دانشگاه اخراج شود ، آنگاه تخصص لازم را کسب نخواهد کرد .
- اگر علی کتاب‌های بسیاری بخواند ، آنگاه تخصص لازم را کسب خواهد کرد .

بنابراین ، علی به دلیل بیماری در کلاس‌ها شرکت نمی‌کند و کتاب‌های بسیاری می‌خواند .

پاسخ :

گزاره‌های p, q, r, s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p: علی به دلیل بیماری در کلاسها شرکت نکند .

q: علی از دانشگاه اخراج می‌شود .

r: علی تخصص لازم را کسب نخواهد کرد .

s: علی کتابهای بسیاری می‌خواند .

باید نشان دهیم که استنتاج زیر معتبر نیست .

$p \to q \ \ , q \to r \ , \ s \to \sim r \ \ , \ \vdash p \wedge s$

دلایل	گزاره‌ها	
فرض	$q \to r$	۱
فرض	$s \to \sim r$	۲
عکس نقیض ۲	$r \to \sim s$	۳
قیاس تعدی ۱و۳	$q \to \sim s$	۴
فرض	$p \to q$	۵
قیاس تعدی ۴و۵	$p \to \sim s$	۶

بنابراین ، $p \to \sim s$ درست است . یعنی اگر p درست باشد آنگاه $s\sim$ نیز باید درست و در نتیجه s نادرست است . اما در این صورت $p \wedge s$ نادرست خواهد بود . پس استنتاج مورد بحث معتبر نیست .

۳۴- نشان دهید که استنتاج زیر معتبر است .

$$[\forall x(P(x) \to Q(x)] \wedge [\forall x(Q(x) \to R(x)] \vdash \forall x[P(x) \to R(x)]$$

پاسخ :

فرض	$[\forall x(P(x) \to Q(x)] \wedge [\forall x(Q(x) \to R(x)]$	۱
قیاس تخصیص ۱	$[\forall x(P(x) \to Q(x)]$	۲
جهان لحظه‌ای ۲	$P(a) \to Q(a)$	۳
قیاس تخصیص ۱	$\forall x(Q(x) \to R(x))$	۴
جهان لحظه‌ای ۴	$Q(a) \to R(a)$	۵
قیاس تعدی ۵و۳	$P(a) \to R(a)$	۶
تعمیم جهانی ۶	$\forall x[P(x) \to R(x)]$	۷

۳۵- نشان دهید که استنتاج زیر معتبر است.

$$\exists x\left[P(x)\wedge Q(x)\right] \vdash \exists x P(x)\wedge \exists x Q(x)$$

پاسخ :

۱	$\exists x\left[P(x)\wedge Q(x)\right]$	فرض
۲	$P(a)\wedge Q(a)$	وجود لحظه‌ای ۱
۳	$P(a)$	قیاس تخصیص ۲
۴	$Q(a)$	قیاس تخصیص ۲
۵	$\exists x P(x)$	تعمیم وجودی ۳
۶	$\exists x Q(x)$	تعمیم وجودی ۴
۷	$\exists x P(x)\wedge \exists x Q(x)$	قیاس عطف ۶و۵

۳۶- آیا استنتاج زیر معتبر است ؟

- اگر کودک گرسنه باشد ، گریه خواهد کرد .
- اگر کودک ناراحت باشد ، گریه نخواهد کرد .
- اگر کودک ناراحت باشد ، صورتش سرخ خواهد شد .

بنابراین ، اگر کودک گرسنه باشد ، آنگاه صورتش سرخ خواهد شد .

پاسخ :

گزاره‌های p , q , r , s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

p: کودک گرسنه است .

q: کودک گریه می‌کند .

r: کودک ناراحت است .

s: صورت کودک سرخ است .

باید نشان دهیم که استنتاج زیر معتبر است .

$$p\to q\ ,\ \sim r\to\sim q\ ,\ r\to s \vdash p\to s$$

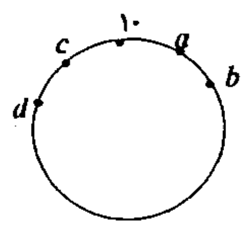
	گزاره‌ها	دلایل
۱	$p \to q$	فرض
۲	$\sim r \to \sim q$	فرض
۳	$q \to r$	عکس نقیض ۲
۴	$p \to r$	قیاس تعدی ۱و۳
۵	$r \to s$	فرض
۶	$p \to s$	قیاس تعدی ۴و۵

پس ، استنتاج مورد بحث معتبر است .

۳۷- ده عدد صحیح ۱،۲،...،۱۰ به طور تصادفی بر روی محیط یک دایره قرار داده شده‌اند. نشان دهید که دست‌کم ، مجموع سه عدد متوالی قرار داده شده ، دست‌کم مساوی ۱۷ است.

پاسخ :

فرض کنیم چنین نباشد . (فرض خلف) عدد ۱۰ را روی دایره در نظر می‌گیریم . این عدد به صورت زیر روی دایره قرار گرفته است .

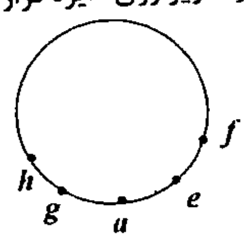


بنا به فرض خلف باید داشته باشیم :

$$۱۰ + c + d \leq ۱۶ \quad , \quad ۱۰ + a + b \leq ۱۶$$
$$\Rightarrow a + b \leq ۶ \quad , \quad c + d \leq ۶$$

روشن است هر کدام از d,c,b,a می‌توانند یکی از ارقام ۱و۲و۳و۴و۵ باشند به شرطی که فرض بالا برقرار باشد .

بنابراین ۴ عدد از اعداد ۱ تا ۵ به d,c,b,a تخصیص داده می‌شوند . حال عدد ۹ را روی دایره در نظر می‌گیریم . این عدد به صورت زیر روی دایره قرار گرفته است .



مجدداً بنا به فرض خلف باید داشته باشیم :

$$۹+e+f \le ۱۶ \quad , \quad g+h+۹ \le ۱۶ \Rightarrow e+f \le ۷ \quad , \quad g+h \le ۷$$

لذا ، هر کدام از h,g,f,e می‌توانند یکی از ارقام ۱و۲و...و۶ باشند به شرطی که فرض زیر برقرار باشد :

$$e+f \le ۷ \quad , \quad g+h \le ۷$$

اما ، می‌دانیم ۴ عدد از اعداد ۱ تا ۵ به d,c,b,a اختصاص یافته است . بنابراین از بین اعداد ۱ تا ۶ تنها ۲ عدد می‌تواند به h,g,f,e تخصیص یابد و این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و دست‌کم مجموع سه عدد متوالی دست‌کم ۱۷ است.

۳۸- فرض کنید که جهان سخن مجموعهٔ $U=\{-۵,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ باشد و

$Q(x): x \ge ۳$ $\qquad$ $P(x): x^۲ < ۵$

$S(x): x^۲ = ۲۵$ $\qquad$ $R(x):$ زوج است x

ارزش هر یک از گزاره‌های سوردار زیر را مشخص کنید .

الف) $[\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)] \wedge [\exists x\, Q(x)]$

ب) $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, R(x)$

ج) $\exists x[S(x) \wedge \sim Q(x)]$

د) $\forall x\, P(x) \wedge [\exists x(Q(x) \wedge \sim R(x))]$

پاسخ :

با توجه به توضیحات آمده در تمرین ۲۲ ارزش گزاره‌های داده شده را بررسی می‌کنیم :

الف) نادرست . (بازای $x=۳$ ، گزاره $P(۳) \wedge Q(۳)$ نادرست است)

ب) نادرست . (بازای $x=۵$ ، گزاره $R(۵)$ نادرست است)

ج) درست (بازای $x=-۵$ ، گزاره درست $S(-۵) \wedge \sim Q(-۵)$ به دست می‌آید)

د) نادرست . (بازای $x=۳$ ، گزاره $p(۳)$ نادرست است)

۳۹- با استفاده از استقرای ریاضی ، نشان دهید :

$$۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳ = \left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

پاسخ :

۱. مبنای استقرا . بازای $n=۱$ داریم :

$$۱^۳ = \left[\frac{۱(۱+۱)}{۲}\right]^۲$$

۲. فرض استقرا . فرض کنیم بازای $n=k$ حکم درست باشد . یعنی

$$۱^۳ + ۲^۳ + \dots + k^۳ = \left[\frac{k(k+۱)}{۲}\right]^۲$$

۳. مرحله استقرا . برای $n = k + ۱$ حکم را ثابت می‌کنیم . با توجه به فرض استقرا داریم :

$$
\begin{aligned}
۱^۳ + ۲^۳ + \dots + k^۳ + (k+۱)^۳ &= \left[\frac{k(k+۱)}{۲}\right]^۲ + (k+۱)^۳ \\
&= \frac{k^۲(k+۱)^۲}{۴} + (k+۱)^۳ \\
&= \frac{k^۲(k+۱)^۲ + ۴(k+۱)^۳}{۴} \\
&= \frac{(k+۱)^۲\left[k^۲ + ۴k + ۴\right]}{۴} \\
&= \frac{(k+۱)^۲(k+۲)^۲}{۴} \\
&= \left[\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}\right]^۲
\end{aligned}
$$

لذا حکم ثابت می‌شود .

۴۰- نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n ، بیشتر از n عدد اول وجود دارد.

پاسخ :

حکم را به روش برهان خلف ثابت می‌کنیم .

فرض کنیم بازای یک عدد طبیعی مانند M تعداد کل اعداد اول کمتر از M باشد. این اعداد اول را با $p_۱, p_۲, \dots, p_k$ نشان می‌دهیم $(K \leq M)$.

ثابت می‌کنیم $P = P_1 P_2 \ldots P_k + 1$ یک عدد اول است .

اگر P اول نباشد ، آنگاه دارای یک عامل اول است . اما می‌دانیم تمام اعداد اول عبارتند از $P_1, P_2, \ldots, P_k$ اما ، هیچکدام از این اعداد ، عامل P نیستند و این تناقض است . پس تعداد اعداد اول نامتناهی است .

۴۱- نشان دهید :

(الف) اگر $n \geq 17$ ، آنگاه $2^n > n^4$.

(ب) اگر $n \geq 9$ ، آنگاه $n! > 4^n$.

(ج) اگر $n \geq 4$ ، آنگاه $3^n > 2^n + 64$.

پاسخ :

الف)

۱. مبنای استقرا . برای $n=17$ داریم :

$$2^{17} = 131072 \quad , \quad 17^4 = 83521$$

پس $2^{17} > 17^4$

۲. فرض استقرا . فرض کنیم برای $n = k$ $(k \geq 17)$ حکم برقرار باشد . یعنی

$$2^k > k^4$$

۳. مرحله استقرا. برای $n=k+1$ حکم را ثابت می‌کنیم . با توجه به فرض استقرا

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^4 > (k+1)^4$$

حال اگر نامساوی $2k^4 > (k+1)^4$ را ثابت کنیم حکم اثبات می‌شود .

برای اثبات نامساوی $2k^4 > (h+1)^4$ ، تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \frac{2x^4}{(x+1)^4}$$

در این صورت

$$f'(x) = \frac{8x^3(x+1)^4 - 8x^4(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{8x^3(x+1)^3\left[x+1-x\right]}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{8x^3(x+1)^3(1)}{(x+1)^8}$$

f' بازای $x > 0$ ، همواره مثبت است . پس f ، بازای $x>0$ اکیداً صعودی است .

از طرفی برای $x=16$ داریم :

$$f(16) = \frac{2(16)^4}{(1+16)^4} = 1/57$$

حال اگر $x \geq ۱۷$ ، از اینکه f صعودی است خواهیم داشت $f(۱۶) \leq f(x)$

پس برای هر $x \geq ۱۷$ داریم :

$$۱ < ۱/۵۷ \leq \frac{۲x^۴}{(۱+x)^۴}$$

پس بازای هر $x \geq ۱۷$ ، $(۱+x)^۴ < ۲x^۴$.

اما در مرحله استقرا داریم $x \geq ۱۷$ ، در نتیجه $(۱+k)^۴ \leq ۲k^۴$ و اثبات تمام است .

ب)

۱. مبنای استقرا . بازای $n = ۹$ داریم :

$۹! = ۳۶۲۸۸۰$, $۴^۹ = ۲۶۲۱۴۴$

پس $۹! > ۴^۹$

۲. فرض استقرا . فرض کنیم برای $n = k$ و $(k \geq ۹)$ حکم برقرار باشد . یعنی

$k! > ۴^k$

۳. مرحله استقرا . برای $n=k+۱$ حکم را ثابت می‌کنیم . چون $k \geq ۹$ پس $k+۱ \geq ۱۰$

طرفین فرض استقرا را در $k+۱$ ضرب می‌کنیم ، بدست می‌آوریم :

$$(k+۱)k! > (k+۱)۴^k \geq ۱۰ \times ۴^k > ۴ \times ۴^k$$
$$\Rightarrow \quad (k+۱)! > ۴^{k+۱}$$

ج)

۱. مبنای استقرا . بازای $n=۴$ داریم :

$۳^۴ = ۸۱$, $۲^۴ + ۶۴ = ۸۰$

پس $۳^۴ > ۲^۴ + ۶۴$

۲. فرض استقرا . فرض کنیم برای $n = k$ $(k \geq ۴)$ حکم برقرار باشد . یعنی

$۳^k > ۲^k + ۶۴$

۳. مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+۱$ ثابت می‌کنیم . طرفین فرض را در ۳ ضرب می‌کنیم خواهیم داشت :

$$۳ \times ۳^k > ۳ \times ۲^k + ۳ \times ۶۴ > ۲^{k+۱} + ۶۴$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود .

۴۲- هر کدام از جملات زیر را به صورت نمادین بنویسید .

(الف) همهٔ پرندگان می‌توانند پرواز کنند.

(ب) چنین نیست که همهٔ پرندگان پرواز کنند.

(ج) همهٔ کودکان منطقی هستند.

(د) بعضی از کودکان منطقی هستند.

(هـ) دانشجویی هست که ریاضیات را دوست دارد ولی تاریخ را دوست ندارد.

(و) x ، یک عدد فرد و اول است .

(ز) برای همهٔ اعداد صحیح x،x فرد و اول است .

(ح) برای هر عدد صحیح x ، x فرد و اول است .

(ط) عدد صحیحی مثل x وجود دارد که هم فرد است و هم اول است .

(ی) اگر دانشجویی تنبل است ، آنگاه همهٔ دانشجویان تنبل هستند.

(ک) اگر x گویا باشد ، آنگاه x حقیقی است .

پاسخ :

الف) با فرض آنکه

$P(x)$: x پرنده است .

$Q(x)$: x پرواز می‌کند .

جمله داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$$

ب) با علائم (الف) داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sim \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$$

ج)با فرض آنکه

$P(x)$: x کودک است .

$Q(x)$: x منطقی است .

جمله داده شده به صورت نمادین زیر نوشته می‌شود :

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$$

د) با نمادهای به کار رفته در(ج) جمله داده شده به صورت نمادین زیر نوشته می‌شود.

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$$

هـ) با فرض آنکه

$P(x)$: x دانشجو است .

$Q(x)$: x ریاضیات را دوست دارد .

$R(x)$: x تاریخ را دوست دارد .

جمله داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x) \wedge \sim R(x)]$$

و) با فرض آنکه

$P(x)$: x یک عدد فرد است .

$Q(x)$: x یک عدد اول است .

جمله داده شده به صورت $P(x) \wedge Q(x)$ نوشته می‌شود .

ز) با نمادهای به کار رفته در (و) جمله داده شده به صورت نمادین زیر نوشته می‌شود .

$$\forall x \in Z[P(x) \wedge Q(x)]$$

که در اینجا Z مجموعه اعداد صحیح است .

ح) با نمادهای (و) جمله داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\forall x \in Z[P(x) \wedge Q(x)]$$

ط) با نمادهای به کار رفته در (و)

$$\exists x \in Z[P(x) \wedge Q(x)]$$

ی) با فرض آنکه

$p(x)$: x دانشجو است .

$Q(x)$: x تنبل است .

جمله داده شده به صورت نمادین زیر نوشته می‌شود .

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \forall x[P(x) \wedge Q(x)]$$

ک) با فرض آنکه

$P(x)$: x گویاست .

$Q(x)$: x حقیقی است .

جمله داده شده به صورت نمادین زیر نوشته می‌شود .

$$\forall x[P(x) \to Q(x)]$$

۴۳- فرض کنید که جهان سخن مجموعهٔ اعداد صحیح باشد و

x عدد اول است. : $P(x)$

x مثبت است. : $Q(x)$

x زوج است. : $E(x)$

x بر ۹ قابل قسمت است. : $N(x)$

x مربع کامل است. : $S(x)$

x بزرگتر از ۲ است. : $G(x)$

هر یک از عبارت زیر را به صورت نمادین بنویسید :

(الف) x زوج است یا x مربع کامل است.

(ب) x اول است و x بر ۹ قابل قسمت است.

(ج) x اول است و x بزرگتر از ۲ است.

(د) اگر x اول است، آنگاه x بزرگتر از ۲ است.

(هـ) اگر x اول است، آنگاه x مثبت است و زوج نیست.

پاسخ :

الف) $E(x) \vee S(x)$

ب) $P(x) \wedge N(x)$

ج) $P(x) \wedge G(x)$

د) $P(x) \rightarrow G(x)$

هـ) $P(x) \rightarrow [G(x) \wedge \sim E(x)]$

۴۴- اگر جهان سخن مجموعهٔ اعداد صحیح باشد، دروغ و یا راست بودن هر کدام از جملات زیر را مشخص کنید.

(الف) $\forall x,[x^۲ - ۲ \geq ۰]$.

(ب) $\forall x,[x^۲ - ۱۰x + ۲۱ = ۰]$.

(ج) $\exists x,[x^۲ - ۱۰x + ۲۱ = ۰]$.

(د) $\forall x,[x^۲ - x - ۱ \neq ۰]$.

(هـ) $\exists x,[۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰]$.

(و) $\exists x,[(x^۲ > ۱۰) \wedge ($ زوج است $x)]$.

(ز) $\forall x,[\exists y,(x^۲ = y)]$.

(ح) $\exists x,[\forall y,(x^۲ = y)]$.

(ط) $\forall y,[\exists x,(x^۲ = y)]$.

(ی) $\exists y,[\forall x,(x^۲ = y)]$.

پاسخ :

با توجه به توضیح آمده در تمرین ۲۲ داریم :

الف) دروغ ، $x = ۱$ یک مثال نقض است . (برای $x=۱$ رابطه برقرار نیست)

ب) دروغ ، $x = ۰$ یک مثال نقض است .

ج) راست ، برای $x = ۳$ رابطه برقرار است .

د) دروغ ، چون $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۵ > ۰$ ، پس معادله $x^۲ - x - ۱ = ۰$ دو ریشه $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ دارد .

هـ) راست. بازای $x = ۱$ رابطه داده شده برقرار است .

و) راست. $x = ۱۲$ در رابطه داده شده صدق می‌کند .

ز) راست . بازای هر $x \in Z$ ، $x^۲ \in Z$. پس yای هست که $y \in Z$, $x^۲ = y$

ح) دروغ ، ثابت می‌کنیم نقیض گزاره داده شده ، یعنی $\sim (\exists x[\forall y\ ,\ x^۲ = y])$ درست است . یعنی نشان می‌دهیم :

$$\forall x[\exists y\ \ x^۲ \neq y]$$

درست است.روشن است بازای هر $x \in Z$ ، اگر فرض کنیم $y = x^۲ + ۱$ آنگاه خواهیم داشت $x^۲ \neq y$. پس نقیض $\sim \exists x[\forall y\ \ x^۲ = y]$ راست است . درنتیجه خود گزاره ، یعنی $\exists x[\forall x\ \ x^۲ = y]$ دروغ می‌باشد .

ط) دروغ . بازای $y = -۱$ رابطه برقرار نیست .

ی) دروغ . کافیست ثابت کنیم نقیض گزاره یعنی $\sim (\exists y[\forall x\ \ x^۲ = y])$ ، درست است . یعنی نشان می‌دهیم $\forall y[\exists x\ ,\ x^۲ \neq y]$ درست است . بازای هر y، اگر فرض کنیم $x=y+۱$ آنگاه خواهیم داشت $x^۲ \neq y$ ، درنتیجه گزاره $\sim\exists y[\forall x, (x^۲ = y)]$ درست است . بنابراین گزاره $\exists x[\forall x\ ,\ x^۲ = y]$ دروغ می‌باشد.

۴۵- نقیض هر کدام از جملات را در تمرین قبل بنویسید.

پاسخ :

الف) $\exists x\,[x^۲ - ۲ < ۰]$

ب) $\exists x\,[x^۲ - ۱۰x + ۲۱ \neq ۰]$

ج) $\forall x[x^۲ - ۱۰x + ۲۱ \neq ۰]$

د) $\exists x\,[x^۲ - x - ۱ = ۰]$

هـ) $\forall x[۲x^۲ - ۳x + ۱ \neq ۰]$

و) $\forall x[(x^۲ \leq ۱۰) \vee (\text{فرد است } x)]$

ز) $\exists x\,[\forall y,(x^۲ \neq y)]$

ح) $\forall x[\exists y\ ,(x^۲ \neq y)]$

ط) $\exists y\,[\forall x,(x^۲ \neq y)]$

ی) $\forall y[\exists x\ ,(x^۲ \neq y)]$

۴۶- با تغییر سورها ، نقیض هرکدام از عبارات زیر را بنویسید.

(الف) برای هر عدد صحیح x ، اگر x زوج است ، آنگاه $x^2 + x$ زوج است.

(ب) عدد صحیحی مثل x وجود دارد ، به گونه‌ای که x زوج است و x اول است.

(ج) عدد صحیحی مثل x وجود ندارد به گونه‌ای که x اول باشد و $x+6$ اول باشد .

(د) برای هر عدد صحیح x ، $x^2 + 3 > 5$ یا $x<2$.

(هـ) برای هر عدد صحیح x ، یا x ، یا $x-1$ ، یا $x-2$ و یا $x-3$ بر عدد ۴ قابل قسمت است.

(و) برای هر عدد صحیح x ، اگر x^2 زوج است ، آنگاه x زوج است.

(ز) $[\forall x, x^2 = 25]$ ، یا x منفی است .

(ح) $[\exists x, x^2 = 25]$ ، یا $x>0$.

پاسخ :

الف) با توجه به اینکه $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$ خواهیم داشت :

وجود دارد عدد صحیح x که x زوج است و $x^2 + x$ زوج نیست .

ب) بازای هر عدد صحیح x ، یا x زوج نیست یا x اول نیست .

ج) عدد صحیحی مثل x وجود دارد بطوریکه یا x اول نیست و یا $x+6$ اول نیست .

د) وجود دارد عدد صحیحی مانند x به طوریکه $x^2 + 3 \leq 5$, $x \geq 2$

هـ) عدد صحیحی مانند x وجود دارد بطوریکه x , $x-1$, $x-2$ و $x-3$ بر عدد ۴ قابل تقسیم نیستند .

و) عدد صحیحی مانند x وجود دارد بطوریکه x^2 زوج است و x زوج نیست. (توجه: $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$)

ز) x ای هست به طوریکه $x^2 \neq 25$, x منفی نیست .

ح) بازای هر x ، $x^2 \neq 25$, $x \leq 0$

۴۷- گزاره‌نماهای تعریف شده در زیر بر روی جهان $U = \{-5,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ مفروض هستند .

$P(x): x^2 < 5$

$Q(x): x \geq 3$

$R(x)$: x ضریبی از ۲ است.

$S(x): x^2 = 25$

مجموعه درستی عبارات زیر را به دست آورید :

(الف) $P(x) \vee Q(x)$

(ب) $P(x) \wedge R(x)$

(ج) $[\sim P(x)] \vee Q(x)$

د) $P(x) \wedge [\sim Q(x)]$

هـ) $\sim \{[\sim P(x)] \wedge [\sim Q(x)]\}$

و) $[\sim P(x)] \vee \{Q(x) \wedge [\sim R(x)]\}$

ز) $S(x)$

ح) $S(x) \wedge Q(x)$

ط) $S(x) \wedge [\sim Q(x)]$

ی) $[P(x) \wedge Q(x)] \wedge S(x)$

پاسخ :

الف) {۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰}

ب) {۰،۲}

ج) {-۵،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰}

د) {۰،۱،۲}

هـ) مجموعه درستی $[\sim P(x)] \wedge [\sim Q(x)]$ عبارتست از {-۵} ، بنابراین مجموعه درستی $\sim \{[\sim P(x)] \wedge [\sim Q(x)]\}$ به صورت زیر می‌باشد .

{۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰}

و) مجموعه درستی $\{[Q(x)] \wedge [\sim R(x)]\}$ به صورت زیر است.

{۳،۵،۷،۹}

بنابراین ، مجموعه درستی $[\sim P(x)] \vee \{Q(x) \wedge [\sim R(x)]\}$ به صورت زیر خواهد بود:

{-۵،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰}

ز) {-۵،۵}

ح) {۵}

ط) {-۵}

ی) ϕ

۴۸- معتبر بودن و یا نبودن هر یک از استدلال‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) - هیچ ریاضیدانی جاهل نیست .

- همهٔ افراد جاهل ، مغرور هستند .

بنابراین ، بعضی از افراد مغرور و ریاضی‌دان نیستند .

(ب) - همهٔ اعداد صحیح ، اعدادی گویا هستند .

- بعضی از اعداد صحیح ، به صورت توانی از ۲ هستند .

بنابراین ، بعضی از اعداد گویا به صورت توانی از ۲ هستند .

(ج)- همهٔ سگ‌ها ، گوشتخوار هستند .

- بعضی از حیوانات سگ هستند .

بنابراین ، بعضی از حیوانات گوشتخوار هستند .

پاسخ :

الف) با فرض آنکه

$P(x)$: x ریاضی‌دان است .

$Q(x)$: x جاهل است .

$R(x)$: x مغرور است .

الف) استدلال فوق معتبر نیست . چرا که ممکن است هیچ فرد مغروری وجود نداشته باشد گزاره

$$\exists x[R(x) \wedge \sim P(x)]$$

لزوماً نتیجه نمی‌شود .

ب) با فرض آنکه

$P(x)$: x عدد صحیح است .

$Q(x)$: x عددگویا است .

$R(x)$: x به صورت توانی از ۲ است .

نشان می‌دهیم استنتاج زیر معتبر است .

$$\forall x[P(x) \to Q(x)] \,,\, \exists x[P(x) \wedge R(x)] \vdash \exists x[Q(x) \wedge R(x)]$$

۱	$\exists x[P(x) \wedge R(x)]$	فرض
۲	$P(a) \wedge R(a)$	وجود لحظه‌ای ۱
۳	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	فرض
۴	$P(a) \to Q(a)$	وجود جهانی ۳
۵	$P(a)$	قیاس تخصیص ۲
۶	$R(a)$	قیاس تخصیص ۲
۷	$Q(a)$	قیاس استثنایی ۴و۵
۸	$R(a) \wedge Q(a)$	قیاس عطف ۶و۷
۹	$\exists x[R(x) \wedge Q(x)]$	تعمیم وجودی ۸

ج) با فرض آنکه

$P(x)$: x سگ است .

$Q(x)$: x گوشتخوار است .

$R(x)$: x حیوان است .

اعتبار قیاس زیر را نشان می‌دهیم.

$$\forall x[P(x) \to Q(x)]\ ,\ \exists x[P(x) \wedge R(x)] \vdash \exists x[R(x) \wedge Q(x)]$$

استنتاجهای مورد نیاز برای نشان دادن اعتبار قیاس فوق دقیقاً مانند قسمت (ب) می‌باشد .

در تمرینهای ۴۹ الی ۶۰ ، با استفاده از استقرای ریاضی ، نشان دهید که عبارات داده شده، برای هر عدد صحیح و مثبت n معتبر هستند .

۴۹- اگر $a_n = ۵a_{n-۱} - ۶a_{n-۲}$ ، $n \geq ۲$ ، $a_۰ = ۱۲$ و $a_۱ = ۲۹$ آنگاه ،

$$a_n = ۵(۳^n) + ۷(۲^n)$$

پاسخ :

۱. مبنای استقرا . بازای $n=۱$ داریم :

$$a_۱ = ۵(۳^۱) + ۷(۲^۱) = ۲۹$$

۲. فرض استقرای قوی . فرض کنیم حکم بازای $۱ \leq i \leq k$ برقرار باشد . یعنی ،

$$a_i = ۵(۳^i) + ۷(۲^i) \qquad ۱ \leq i \leq k$$

۳ . مرحله استقرای قوی . نشان می‌دهیم حکم برای $n=k+۱$ نیز صحیح است . با توجه به فرض استقرای قوی و تعریف a_nها داریم :

$$\begin{aligned}
a_{k+۱} &= ۵a_k - ۶a_{k-۱} \\
&= ۵\left[۵(۳^k) + ۷(۲^k)\right] - ۶\left[۵(۳^{k-۱}) + ۷(۲^{k-۱})\right] \\
&= ۲۵(۳^k) + ۳۵(۲^k) - ۲(۳)(۵)(۳^{k-۱}) - ۲(۳)(۷)(۲^{k-۱}) \\
&= ۲۵(۳^k) + ۳۵(۲^k) - ۱۰(۳^k) - ۲۱(۲^k) \\
&= (۲۵-۱۰)(۳^k) + (۳۵-۲۱)(۲^k) \\
&= ۱۵(۳^k) + ۱۴(۲^k) \\
&= ۵(۳^{k+۱}) + ۷(۲^{k+۱})
\end{aligned}$$

و اثبات تمام است .

۵۰- برای هر $n \geq ۱$ ، $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲ = n(n+۱)(۲n+۱)/۶$.

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=۱$ داریم :

$$۱ = \frac{۱(۱+۱)(۲+۱)}{۶}$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم برای $n=k$ حکم برقرار باشد ، یعنی

$$۱^۲ + ۲^۲ + ... + k^۲ = \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+۱$ ثابت می‌کنیم . با توجه به فرض استقرا داریم :

$$\begin{aligned}
۱^۲ + ۲^۲ + ... + k^۲ + (k+۱)^۲ &= \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶} + (k+۱)^۲ \\
&= \frac{k(k+۱)(۲k+۱) + ۶(k+۱)^۲}{۶} \\
&= \frac{(k+۱)\left[k(۲k+۱) + ۶(k+۱)\right]}{۶} \\
&= \frac{(k+۱)\left[۲k^۲ + ۷k + ۶\right]}{۶} \\
&= \frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶} \\
&= \frac{(k+۱)(k+۲)\left[۲(k+۱)+۱\right]}{۶}
\end{aligned}$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود .

-۵۱

$$۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ... + (۲n-۱)^۲ = n(۲n-۱)(۲n+۱)/۳$$

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=۱$ داریم :

$$۱^۲ = ۱(۲-۱)(۳)/۳$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n=k$ برقرار باشد . یعنی

$$۱^۲ + ۳^۲ + ... + (۲k-۱)^۲ = \frac{k(۲k-۱)(۲k+۱)}{۳}$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را بازای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم . از فرض استقرا داریم :

$$1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2$$
$$=\frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)^2}{3}$$
$$=\frac{(2k+1)\left[k(2k-1)+3(2k+1)\right]}{3}$$
$$=\frac{(2k+1)\left[2k^2+5k+3\right]}{3}$$
$$=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{3}$$

اثبات تمام است .

-۵۲

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=1$ داریم :

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n=k$ راست باشد . یعنی

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم . از فرض استقرا داریم :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

-۵۳

$$1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=1$ داریم :

$$1^3=1^2(2-1)$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم بازای $n=k$ رابطه برقرار باشد. یعنی

$$1^3+3^3+5^3+\dots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم . با توجه به فرض استقرا داریم :

$$1^3+3^3+5^3+\dots+(2k-1)^3+[2(k+1)-1]^3=k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3$$

حال کافیست نشان دهیم

$$k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=(k+1)^2[2(k+1)^2-1]$$

طرف دوم تساوی بالا برابر است با $2(k+1)^4-(k+1)^2$. از طرفی . طرف اول عبارت بالا برابر است با :

$$k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=2k^4-k^2+8k^3+12k^2+6k+1$$
$$=2k^4+8k^3+12k^2+8k+2-k^2-2k-1$$
$$=2(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-(k^2+2k+1)$$
$$=2(k+1)^4-(k+1)^2=2(k+1)^2\left[(k+1)^2-1\right]$$

۵۴- $n(n^۲+۵)$ مضربی از عدد ۶ است .

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . برای $n=۱$ داریم :

$$۱(۱+۵)=۶$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n=k$ برقرار باشد . یعنی عدد صحیح و مثبت m وجود دارد به طوریکه

$$k(k^۲+۵)=۶m$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+۱$ ثابت می‌کنیم .

$$\begin{aligned}(k+۱)((k+۱)^۲+۵) &= (k+۱)^۳+۵(k+۱)\\ &= k^۳+۳k^۲+۳k+۱+۵k+۵\\ &= (k^۳+۵k)+(۳k^۲+۳k+۶)\\ &= k(k^۲+۵)+۳[k(k+۱)+۲]\end{aligned}$$

با توجه به فرض استقرا $k(k^۲+۵)=۶m$ ، از طرفی حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی همواره عددی زوج است.پس r ای هست به طوریکه $k(k+۱)=۲r$
با جاگذاری این عبارات در عبارت بدست آمده ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(k+۱)((k+۱)^۲+۵) &= k(k^۲+۵)+۳[k(k+۱)+۲]\\ &= ۶m+۳[۲r+۲]\\ &= ۶m+۶(r+۱)\\ &= ۶(m+r+۱)\end{aligned}$$

لذا حکم ثابت می‌شود .

۵۵- $n(n^۲-۱)(۳n+۲)$ مضربی از ۲۴ است .

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=۱$ داریم :

$$۱(۱-۱)(۳+۲)=۰=۲۴\times۰$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم بازای $n=k$ عدد صحیح m چنان باشد که

$$k(k^۲-۱)(۳k+۲)=۲۴m$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(k+1)\left[(k+1)^2-1\right]\left[2(k+1)+2\right] &= (k+1)\left[(k+1-1)(k+1+1)\right]\left[2k+3+2\right]\\ &= (k+1)\left[k(k+2)\right]\left[2k+2+3\right]\\ &= (k+1)\left[k(k-1+3)\right]\left[(2k+2)+3\right]\\ &= k(k+1)\left[(k-1)+3\right]\left[(2k+2)+3\right]\\ &= k(k+1)\left[(k-1)(2k+2)+3(k-1)+3(2k+2)+9\right]\\ &= k(k+1)\left[(k-1)(2k+2)+(12k+12)\right]\\ &= k(k+1)(k-1)(2k+2)+k(k+1)(12k+12)\\ &= k(k^2-1)(2k+2)+12k(k+1)(k+1)\end{aligned}$$

اما ، بنا به فرض استقرا $k(k^2-1)(2k+2)=24m$. از طرفی حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی همواره عددی زوج است . یعنی عدد صحیح r وجود دارد بطوریکه $k(k+1)=2r$. با جاگذاری در رابطه بدست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(k+1)((k+1)^2-1)(2(k+1)+2) &= k(k^2-1)(2k+2)+12k(k+1)(k+1)\\ &= 24m+12(2r)(k+1)\\ &= 24\left[m+r(k+1)\right]\end{aligned}$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود .

۵۶- برای هر عدد حقیقی $x>-1$ ، $(1+x^n)\geq 1+nx$.

پاسخ :

رابطه داده شده نادرست است.

زیرا با فرض $x=1$ و $n=10$ رابطه $1+10^{10}\geq 1+10\times 1$ برقرار نیست . لذا ، عبارت داده شده را به صورت $(1+x)^n\geq 1+nx$ اصلاح کرده ، آنرا به استقرا ثابت می‌کنیم.

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=1$ از اینکه $x>-1$ داریم :

$1+x\geq 1+x$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n=k$ برقرار باشد .یعنی

$(1+x)^k\geq 1+kx$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم . از اینکه $x > -1$ داریم $1 + x > 0$ حال طرفین فرض استقرا را در $1+x$ ضرب می‌کنیم . خواهیم داشت :

$$(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx)$$
$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2$$
$$\geq 1+kx+x = 1+(k+1)x$$
$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

بنابراین ، حکم ثابت می‌شود.

۵۷- برای هر عدد صحیح $n \geq 4$ ، $n! > 2^n$.

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا بازای $n=4$ داریم :

$$4! = 24 \ , \ 2^4 = 16 \Rightarrow 4! > 2^4$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم برای $n = k$ $(k \geq 4)$ برقرار باشد . یعنی

$k! > 2^k$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n = k+1$ $(k \geq 4)$ ثابت می‌کنیم . از فرض استقرا از اینکه $k+1 \geq 5$ داریم :

$$(k+1)(k!) > (k+1)2^k \geq 5 \times 2^k > 2^{k+1}$$
$$\Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$$

۵۸- برای هر عدد صحیح $n \geq 5$ ، $2^n > n^2$.

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . برای $n=5$ داریم :

$$2^5 = 32 \ , \ 5^2 = 25 \Rightarrow 2^5 > 5^2$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n = k$ $(k \geq 5)$ برقرار باشد . یعنی

$2^k > k^2$

۳ . مرحله استقرا : حکم را برای $n = k+1$ $(k \geq 5)$ ثابت می‌کنیم . از اینکه $k \geq 5$ همواره داریم $(k-1)^2 \geq 4^2$ پس

$$k^2 - 2k + 1 \geq 16 \Rightarrow k^2 \geq 2k - 1 + 16 > 2k + 1$$

حال با توجه به رابطه اخیر و استقرا داریم :

$$۲\times ۲^k > ۲k^۲$$
$$\Rightarrow ۲^{k+۱} > k^۲ + k^۲ > k^۲ + ۲k + ۱$$
$$\Rightarrow ۲^{k+۱} > (k+۱)^۲$$

۵۹- نشان دهید که هر عدد صحیحی که از ۳^n رقم مشابه تشکیل شده باشد بر ۳^n قابل قسمت است (برای مثال اعداد ۲۲۲ و ۵۵۵ بر ۳ قابل قسمت و اعداد ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ و ۵۵۵۵۵۵۵۵۵ بر ۹ قابل قسمت هستند) .

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=۱$ تمام اعداد صحیحی که از ۳ رقم مشابه تشکیل شده‌اند به صورت aaa می‌باشند . مجموع ارقام این عدد $۳a$ می‌باشد . بنابراین aaa بر ۳ بخشپذیر است .

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم بازای $n=k$ هر عدد صحیحی که از ۳^k رقم مشابه تشکیل شده باشد بر ۳^k قابل قسمت باشد .

۳ . مرحله استقرا . بازای $n=k+۱$ ، فرض کنیم b عدد صحیحی باشد که از $۳^{k+۱}$ رقم مشابه a تشکیل شده است . به عبارتی

$$b = \underbrace{aaa...a}_{۳^{k+۱}}$$

در این صورت مجموع ارقام b برابر است با $a\times ۳^{k+۱}$. لذا بنا بر قضیه‌ای از نظریه اعداد ، b بر $۳^{k+۱}$ بخش‌پذیر می‌باشد .

۶۰- برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$ ، $n^۳ + ۱ > n^۲ + n$.

پاسخ :

۱ . مبنای استقرا . بازای $n=۲$ داریم :

$$۲^۳ + ۱ = ۹ \;\; , ۲^۲ + ۲ = ۶ \Rightarrow ۲^۳ + ۱ > ۲^۲ + ۲$$

۲ . فرض استقرا . فرض کنیم حکم بازای $n = k$ $(k \geq ۲)$ برقرار باشد . یعنی

$$k^۳ + ۱ > k^۲ + k$$

۳ . مرحله استقرا . حکم را برای $n = k + 1$ $(k \geq 2)$ ثابت می‌کنیم . از اینکه $k \geq 2$ پس $k^{2} > k$ لذا با توجه به مطلب اخیر و فرض استقرا داریم :

$$\begin{aligned}(k+1)^{3} + 1 &= k^{3} + 3k^{2} + 3k + 1 \\ &= (k^{3} + 1) + 3k^{2} + 3 > k^{2} + k + 3k^{2} + 3 \\ &> k^{2} + k + 3k + 2 \\ &> (k+1)^{2} + (k+1)\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات تمام می‌شود .