

حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

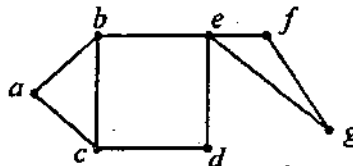
کرداورنده:

Pnu-Soal.ir

فصل ششم

تمرينات فصل ٦

۱- برای گراف شکل زیر، همه مسیرهای از b به f را پیدا کنید.



➡ پاسخ :

مسیرهای از b به f عبارتند از :

b-e-f

b-e-g-f

b-c-d-e-f

b-c-d-e-g-f

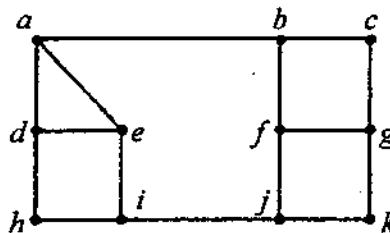
b-a-c-d-e-f

b-a-c-d-e-g-f

مسیرهای دیگری هم وجود دارد که یکی از آنها به صورت زیر است:

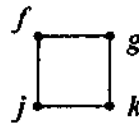
b-e-d-c-b-e-f

۲- شکل زیر ، گراف بی‌سویی را نشان می‌دهد که نشانگر یک انبار است . رئوس این گراف ، نشانگر گاو صندوق‌ها و یال‌های آن ، نشانگر راهروهای موجود بین گاو صندوق‌ها هستند . برای حفاظت این انبار ، چند نگهبان به شرح زیر در محل گاو صندوق‌ها قرار می‌دهیم . در محل هر گاو صندوق ، یا یک نگهبان قرار دارد و یا فاصله آن از گاو صندوقی که در محل آن نگهبانی قرار داده شده ، حداکثر ، ۲ راهرو است . کمترین تعداد نگهبانان لازم برای این کار چند نفر است ؟



پاسخ :

یک رأس با بیشترین درجه انتخاب کرده ، یک نگهبان در آنجا مستقر می‌کنیم ، حال تمام رأسهایی از گراف را که فاصله‌شان از محل نگهبان یک یا دو راهرو است حذف می‌کنیم . برای این کار رأس a را که درجه آن ۳ است در نظر گرفته یک نگهبان در این رأس مستقر می‌کنیم . اکنون رأسهای i, h, d, e, c, b, a را که فاصله‌شان از رأس a یک یا دو راهرو است حذف می‌کنیم . بنابراین گراف زیر باقی می‌ماند .



برای این گراف نیز همان کار را تکرار می‌کنیم . چون درجه تمام رأسها یکسان است بنابراین یک رأس به دلخواه انتخاب کرده و یک نگهبان در آنجا مستقر می‌کنیم . در نتیجه حداقل نگهبان لازم برای حفاظت از انبار با شرایط مطلوب حداقل ۲ نگهبان می‌باشد .

۳- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو ، همبند و بدون حلقه ، و $\{a,b\}$ یک یال از G است . نشان دهید که $\{a,b\}$ قسمتی از یک دور است ، اگر و تنها اگر ، حذف یال $\{a,b\}$ باعث غیرهمبند بودن گراف نشود .

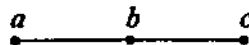
پاسخ :

بدون پاسخ !

۴- مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که حذف هر یالی از آن ، موجب غیرهمبند بودن آن شود .

پاسخ :

گراف زیر را در نظر بگیرید :



۵- فرض کنید که G گرافی باشد که شرط تمرین ۴ را دارد ،

الف) آیا G باید بدون حلقه باشد ؟

ب) آیا G می‌تواند گراف چندگانه باشد ؟

ج) اگر nG رأس داشته باشد، تعداد یال‌های آن چند تا است؟

پاسخ:

الف) بله، حذف یک حلقه نمی‌تواند یک گراف همبند را به یک گراف غیر همبند تبدیل کند.

ب) خیر. اگر مثلاً بین b, a دو یال موجود باشد. آنگاه با حذف یکی از یالهای بین b, a گراف همبندی خود را حفظ می‌کند.

ج) گراف مورد بحث با n رأس باید $n-1$ یال داشته باشد. آیین حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم. بازای $n=2$ حکم درست است. فرض کنیم بازای هر $2 < m < n$ حکم درست باشد. آنرا بازای n ثابت می‌کنیم. یک یال از گراف G حذف می‌کنیم. در این صورت دو زیرگراف G' با k' رأس و G'' با k'' رأس به دست می‌آید که $k' + k'' = n$. بنا به فرض G' دارای $k'-1$ یال و G'' دارای $k''-1$ یال می‌باشد. بنابراین گراف غیر همبند بدست آمده دارای

$$(k'-1) + (k''-1) = k' + k'' - 2 = n - 2$$

یال می‌باشد. یا افزودن یالی که حذف کرده‌ایم گراف مورد بحث دارای $n-1$ یال خواهد بود. بنابراین حکم درست است.

۶- الف) اگر $G=(V, E)$ یک گراف بی‌سو و بدون حلقه با $|V|=v$ و $|E|=e$ باشد، نشان دهید که $2e \leq v^2 - v$

ب) این رابطه، برای گراف‌های سولار، به چه صورت بیان می‌شود؟

پاسخ:

الف) فرض کنیم گراف G دارای v رأس a_1, a_2, \dots, a_v باشد. اگر گراف ساده و بدون حلقه باشد آنگاه از a_1 حداکثر $v-1$ یال می‌توان به رأسهای a_2, \dots, a_v رسم نمود. از رأس a_2 حداکثر $v-2$ یال به یالهای a_3, \dots, a_v رسم نمود و ... بدین ترتیب تعداد کل یالهایی که می‌توان رسم کرد عبارتند از:

$$e \leq (v-1) + (v-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{v(v-1)}{2} = \frac{v^2 - v}{2}$$

$$\Rightarrow 2e \leq v^2 - v$$

ب) اگر گراف G دارای v رأس a_1, a_2, \dots, a_v بوده و گراف ساده و بدون حلقه باشد آنگاه از هر رأس می‌توان حداکثر $v-1$ کمان به رأسهای دیگر رسم نمود. بنابراین تعداد کل یالهایی که می‌توان رسم کرد برابر است با:

$$e \leq v(v-1) = v^2 - v$$

۷- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو است. رابطه R در V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: aRb اگر و تنها اگر $a=b$ ، یا، مسیری از a به b موجود است. نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی تعریف شده به وسیله R را توضیح دهید.

پاسخ:

نشان می‌دهیم R یک رابطه هم‌ارزی است.

(۱) بازتابی. چون $a=a$ پس aRa

(۲) تقارن. اگر aRb آنگاه مسیری از a به b وجود دارد. روشن است اگر محل یالها را وارون کنیم یک مسیر از b به a به دست می‌آید. بنابراین bRa

(۳) تعدی. فرض کنیم aRb ، bRc ، آنگاه مسیری مانند

$$a - v_1 - v_2 - \dots - v_k - b$$

از a به b و مسیری مانند

$$b - w_1 - w_2 - \dots - w_r - c$$

از b به c موجود است. در این صورت:

$$a - v_1 - \dots - v_k - b - w_1 - \dots - w_r - c$$

یک مسیر از a به c است. بنابراین aRc

پس R یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

هر کلاس هم‌ارزی R شامل تمام رأس‌هایی از G است که بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد. بنابراین کلاسهای هم‌ارزی R همان مولفه‌های R می‌باشد.

۸- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو و بدون حلقه با $|V|=v$ و $|E|=e$ است. کمترین مقدار لازم برای e ، بر حسب v ، چقدر باشد تا گراف G همبند شود؟

پاسخ:

با توجه به قسمت ج از سوال ۵ داریم:

$$e \geq v-1$$

۹- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو و همبند است. اگر $x, y \in V$ ، نشان دهید که مسیری از x به y وجود دارد به گونه‌ای که شامل همه رئوس G است.

پاسخ:

چون G همبند است بنابراین بین x ، y یک مسیر وجود دارد.

فرض کنیم این مسیر به صورت

$$x - a_1 - \dots - a_k - y$$

باشد. اگر مسیر فوق شامل تمام رأس‌های G باشد مساله تمام است. در غیر اینصورت فرض کنیم a رأسی از G باشد که در مسیر فوق قرار ندارد. در این صورت، از اینکه G همبند است بین a ، x مسیری مانند

$$a - w_1 - \dots - w_r - x$$

وجود دارد. بنابراین مسیر زیر، یک مسیر بین x ، y است که شامل a نیز می‌باشد.

$$x - w_r - \dots - w_1 - a - w_1 - \dots - w_r - x - a_1 - \dots - a_k - y$$

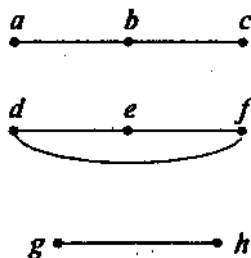
این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که یک مسیر بین x ، y که شامل تمام رأسهای G است بدست آید.

۱۰- $k(G)$ را برای گراف $G=(V,E)$ ، تعریف شده در زیر، به دست آورید:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\}, \{g, h\}\}$$

پاسخ:

گراف G به صورت زیر است:

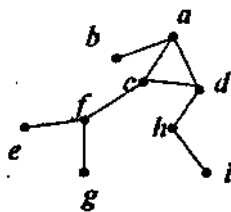


بنابراین $K(G)=3$

۱۱- فرض کنید که $G=(V,E)$ گراف بی‌سوی ارائه شده در شکل زیر باشد.

الف) چند زیرگراف از G می‌توان یافت به گونه‌ای که شامل چهار رأس و یک دور باشد؟

ب) چند زیرگراف همبند از G وجود دارد به گونه‌ای که شامل همه رئوس G باشد؟



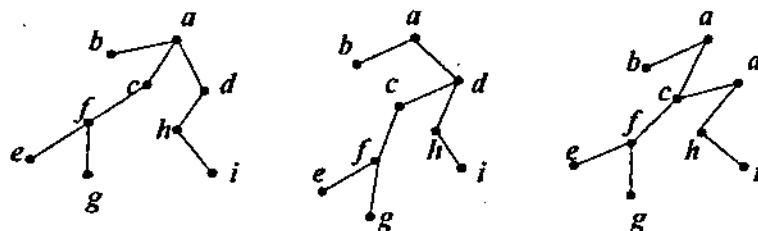
پاسخ:

الف) تنها دوری که در گراف G موجود است از رأس‌های a, c, d به دست می‌آید که شامل ۳ رأس است. حال اگر یک رأس، مجاور با یکی از رأسهای دور فوق را به دور

مورد بحث اضافه کنیم مطلوب به دست می آید. بنابراین ۳ زیرگراف می توان بدست آورد که شامل چهار رأس و یک دور باشد که عبارتند از:

$\{b, a, c, d\}$, $\{f, a, c, d\}$, $\{h, a, c, d\}$

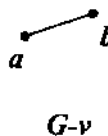
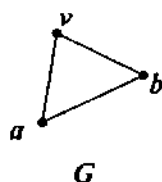
ب) سه زیرگراف همبند G وجود دارد که شامل همه رئوس G است. که عبارتند از:



۱۲- الف) گرافهای $G = (V, E)$ و $G_1 = (V_1, E_1)$ را با $v_1 \in V_1$, $v \in V$ به گونه ای پیدا کنید تا $K(G-v) = K(G)$ ، ولی $K(G_1 - v_1) > K(G_1)$.

پاسخ:

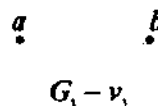
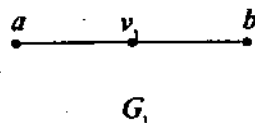
الف) گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید.



داریم:

$$K(G) = K(G-v) = 1$$

و G_1 را به صورت زیر در نظر بگیرید:

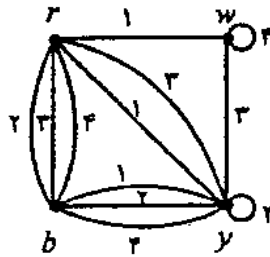


داریم:

$$K(G_1 - v_1) = 2, K(G_1) = 1 \Rightarrow K(G_1 - v_1) > K(G_1)$$

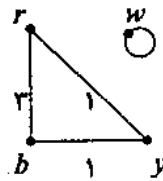
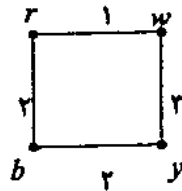
در تمرین‌های ۱۳ الی ۱۵، مسئله حماقت لحظه‌ای ارائه شده به وسیله گراف‌های چندگانه را حل کنید.

-۱۳

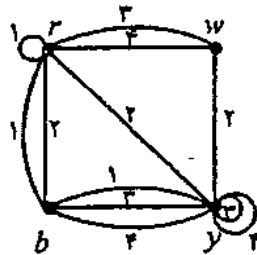


پاسخ:

یک جواب برای مساله به صورت زیر به دست می‌آید:

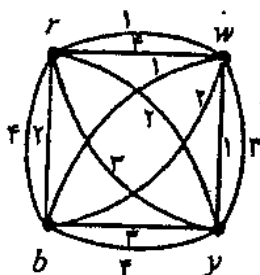


-۱۴



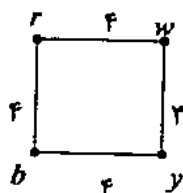
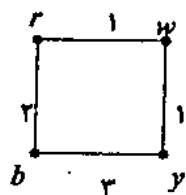
پاسخ:

رأس w دارای درجه ۳ می‌باشد. بنابراین نمی‌توان دو زیرگراف پیدا کرد به گونه‌ای که در هر زیرگراف درجه رأس w برابر ۲ باشد و زیرگراف‌ها یال مشترکی نداشته باشند. بنابراین مساله اخیر جواب ندارد.



پاسخ :

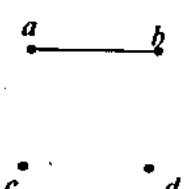
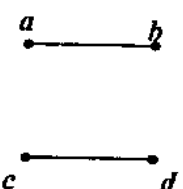
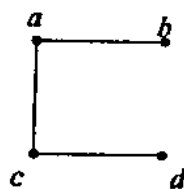
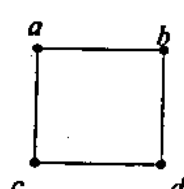
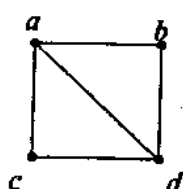
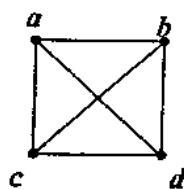
یک جواب برای مساله داده شده به صورت زیر به دست می آید :

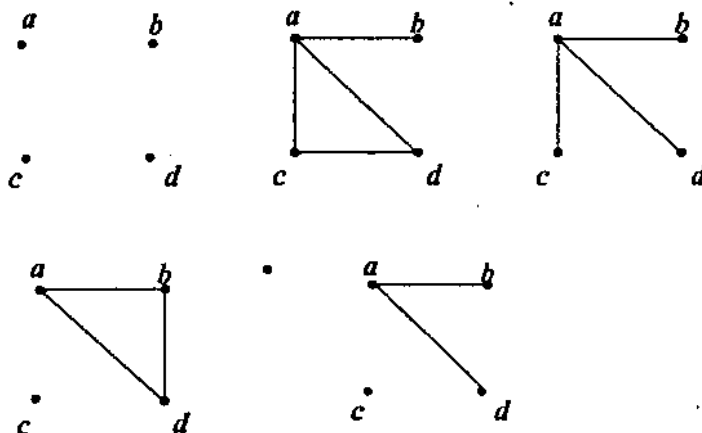


۱۶- تمامی گراف های بی سو ، بدون حلقه و غیریکتاخت با چهار رأس را پیدا کنید . چند تا از این گراف ها همینند هستند ؟

پاسخ :

گراف های غیریکریخت با چهار رأس به صورت زیر می باشند:

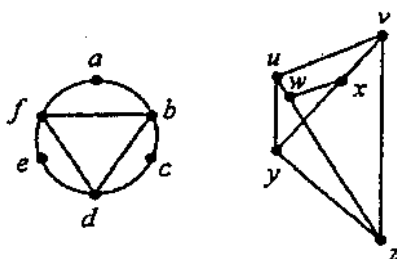




روشن است ۵ تا از این گراف‌ها غیرهمبند می‌باشند.

در تمرین‌های ۱۷ الی ۱۹ تعیین کنید که آیا گراف‌های ارائه شده یکرخت هستند و یا خیر ؟

-۱۷

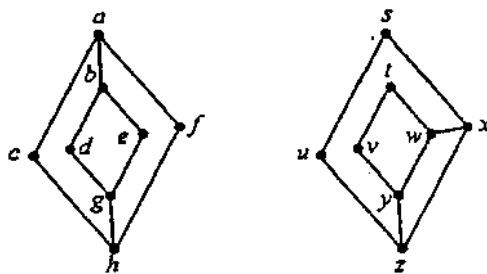


پاسخ :

در گراف سمت راست تمام رئوس با درجه ۳ می‌باشند درحالی‌که در گراف سمت چپ

چنین نمی‌باشد بنابراین دو گراف یکرخت نمی‌باشند .

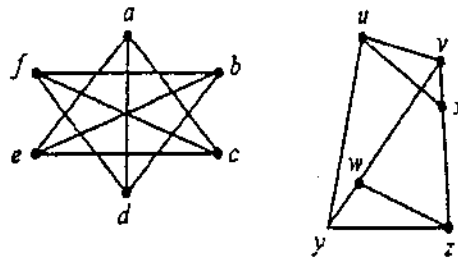
-۱۸



پاسخ :

در گراف سمت چپ، هر رأس با درجه ۳، با دو رأس از درجه ۲ و یک رأس از درجه ۳ مجاور است درحالیکه در گراف سمت چپ چنین نمی باشد. بنابراین دو گراف داده شده یکرخت نمی باشند.

-۱۹



پاسخ :

تناظر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} a &\leftrightarrow u & b &\leftrightarrow w & c &\leftrightarrow x & d &\leftrightarrow y \\ e &\leftrightarrow v & f &\leftrightarrow z \end{aligned}$$

با بررسی یالهای متناظر روشن است که دو گراف داده شده یکرخت می باشند.
۲۰- فرض کنید که $G = (V, E)$ یک گراف ساده بی سو (بدون حلقه) با ۷ رأس و e یال است، چند یال در G وجود دارد؟

پاسخ :

یک گراف ساده گرافی است که هیچ حلقه و یال چندگانه نداشته باشد. با توجه به تمرین ۶، یک گراف ساده حداکثر $\frac{v(v-1)}{2}$ یال دارد اما، می تواند یالهای کمتری نیز داشته باشد.

۲۱- فرض کنید که $f: G_1 \rightarrow G_2$ یک تابع یکرختی است. اگر یک مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس b (در گراف G_1) وجود داشته باشد، نشان دهید که در G_2 نیز یک مسیر به طول ۳ از $f(a)$ به $f(b)$ وجود خواهد داشت.

پاسخ :

فرض کنیم در گراف G_1 مسیری به طول ۳ از رأس a به رأس b موجود باشد. مسیر فوق را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$a - x_1 - x_2 - b$$

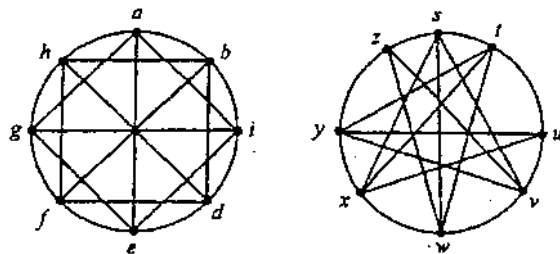
یکریختی است بنابراین متناظر با رأس‌های a, x_r, x_r, x_1, b راسهای $f(x_1), f(a)$ و $f(x_r), f(x_r), f(b)$ در G_r موجود می‌باشند. مجدداً با استفاده از یکریختی f با توجه به اینکه بین x_1, a یالی وجود دارد نتیجه می‌شود که بین $f(x_1), f(a)$ نیز در G_r یالی موجود است. به همین ترتیب بین $f(x_1), f(x_r)$ و نیز بین $f(b), f(x_r)$ نیز یالی موجود است.

بنابراین مسیر زیر در G_r وجود دارد:

$$f(a) - f(x_1) - f(x_r) - f(b)$$

در نتیجه در G_r ، بین $f(b), f(a)$ مسیری به طول ۳ وجود دارد.

۲۲- الف) اگر G_1 و G_r ، دو گراف بی‌سو (بدون حلقه) باشند، نشان دهید که G_1 و G_r یکریخت هستند، اگر و تنها اگر، \bar{G}_1 و \bar{G}_r یکریخت باشند.
ب) آیا گراف‌های ارائه شده در زیر، یکریخت هستند؟



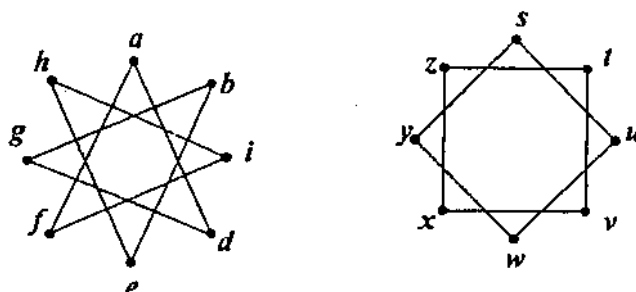
پاسخ:

الف) فرض کنیم G_1, G_r یکریخت باشند. در این صورت با توجه به تعریف، یک تناظر یک‌به‌یک بین رئوس G_1, G_r و نیز یالهای G_1, G_r وجود دارد. اگر $f: G_1 \rightarrow G_r$ یکریختی باشد آنگاه $\bar{f}: \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_r$ نیز یکریختی خواهد بود.

از اینکه بین تمام یالهای G_1, G_r تناظر یک‌به‌یک وجود دارند بنابراین بین یالهایی که در G_1, G_r نیستند نیز یک تناظر یک‌به‌یک وجود خواهد داشت. پس بین یالهای \bar{G}_1, \bar{G}_r یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. از طرفی رأسهای \bar{G}_1, \bar{G}_r رئوس حادث به ترتیب با یالهای \bar{G}_1, \bar{G}_r هستند از اینکه یالهای \bar{G}_1, \bar{G}_r در تناظر یک‌به‌یک هستند. لذا، رأسهای \bar{G}_1, \bar{G}_r نیز در تناظر یک‌به‌یک خواهند بود. در نتیجه \bar{G}_1 با \bar{G}_r یکریخت است.

حال فرض کنیم \bar{G}_1 با \bar{G}_r یکریخت باشد، در این صورت مانند بالا می‌توان ثابت کرد که G_1 نیز با G_r یکریخت است.

ب) مکمل گرافهای داده شده نسبت به k_n صورت زیر هستند.



گراف سمت راست غیر همبند و گراف سمت چپ همبند می باشد. بنابراین دو گراف بالایی همبند نمی باشند. لذا با توجه به (الف) گرافهای داده شده یکریخت نمی باشند. ۲۳-الف) فرض کنید که G یک گراف بی سو با n رأس است. اگر G یکریخت با مکمل خودش یعنی \bar{G} باشد، در این صورت G چند یال دارد (چنین گرافی را خود مکمل گوئیم).
 ب) مثالی از گرافهای خود مکمل با ۴ رأس و ۵ رأس ارائه دهید.
 ج) اگر G گرافی خود مکمل با $n(n > 1)$ رأس باشد، نشان دهید که عدد صحیحی مثل $k > 0$ وجود دارد به گونه ای که $n = 4k$ یا $n = 4k + 1$.

پاسخ:

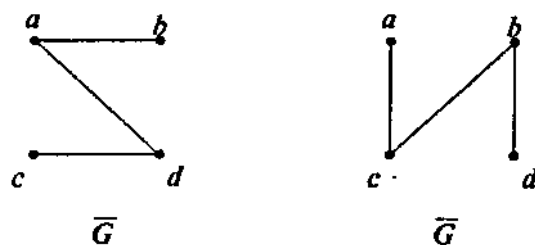
چون G با \bar{G} یکریخت است. پس تعداد یالهای G با \bar{G} برابر است. اما با توجه به تعریف \bar{G} داریم:

$$\text{تعداد یالهای } G = \text{تعداد یالهای } \bar{G} = \frac{n(n-1)}{2}$$

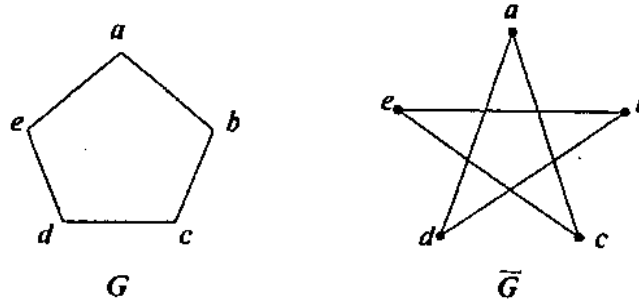
بنابراین:

$$\text{تعداد یالهای } G = \text{تعداد یالهای } \bar{G} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

ب) شکل زیر یک گراف خود مکمل با ۴ رأس را نشان می دهد.



همچنین، گراف زیر، یک گراف خود مکمل با ۵ رأس است.



برای مشاهده یکرختی این دو گراف، $f: G \rightarrow \bar{G}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:
 $f(a) = a$ ، $f(b) = e$ ، $f(c) = b$ ، $f(d) = c$ ، $f(e) = d$
 (ج) با توجه به الف، اگر G گرافی خود مکمل با n رأس باشد، آنگاه داریم:

$$\text{تعداد یالهای } G = \frac{n(n-1)}{2} = \text{عدد صحیح}$$

پس n یا مضرب ۴ است و یا $n-1$ مضرب ۴ است. پس

$$n = 4k \quad \text{یا} \quad n = 4k+1$$

۲۴- فرض کنید که G یک دور با n رأس است. نشان دهید که G خود مکمل است، اگر و تنها اگر $n=5$ باشد.

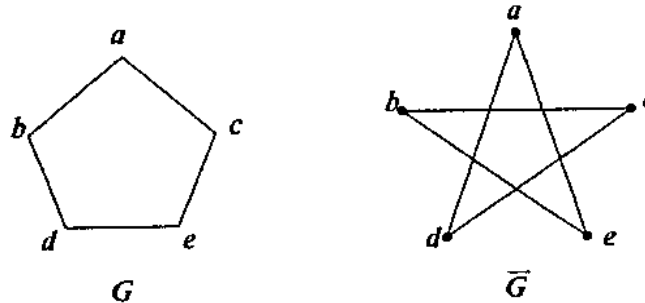
پاسخ:

فرض کنیم G یک دور با n رأس باشد. بنابراین هر رأس G از درجه ۲ می‌باشد. اگر G خود مکمل باشد آنگاه G با مکمل خودش یکرخت خواهد بود. بنابراین درجه رئوس \bar{G} نیز ۲ خواهد بود. در نتیجه درجه هر رأس k برابر خواهد بود با $2+2=4$ اما می‌دانیم درجه هر رأس k برابر است با $n-1$ ، در نتیجه $n=5$ برعکس، فرض کنیم $n=5$ ، G یک دور با ۵ رأس باشد. در این صورت با بررسی حالت‌های مختلف G واضح است که G خود مکمل می‌باشد.

تذکر: با توجه به اینکه $n=5$ بررسی حالت‌های مختلف G ساده است. یک مورد از این نوع را در قسمت ب از تمرین ۲۳ آورده‌ایم.

۲۵- الف) یک گراف، مثل G ارائه دهید که هم G و هم \bar{G} همبند باشند.
 ب) اگر G گرافی با n رأس، $n \geq 2$ ، و غیرهمبند باشد، نشان دهید که \bar{G} همبند است.
 پاسخ:

الف) G و \bar{G} را که در زیر آمده است در نظر بگیرید:



ب) فرض کنیم \bar{G} یک گراف با n رأس ($n \geq 2$) و غیرهمبند باشد. گیریم G دارای k مولفه ($k \geq 2$) باشد. دو عنصر دلخواه از G مانند b, a را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم در \bar{G} بین b, a مسیری وجود دارد. دو حالت برای b, a پیش می‌آید.
 حالت اول: b, a متعلق به دو مولفه مختلف G باشند.

فرض کنیم a به مولفه G_1 و b به مولفه G_r متعلق هستند. از مولفه G_1 یک رأس دلخواه مانند x و از G_r یک رأس دلخواه مانند y در نظر می‌گیریم. در گراف G بین a, y و نیز بین x, b مسیری وجود ندارد. همچنین بین x, y نیز در G مسیری وجود ندارد. (زیرا x, a متعلق به G_1 و y, b متعلق به G_r هستند و G_1 و G_r دو مولفه مختلف از G می‌باشند.) بنابراین در \bar{G} بین a, y و نیز x, b مسیری وجود دارد. این مسیرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a - v_1 - \dots - v_r - y$$

$$y - w_1 - \dots - w_s - x$$

$$x - u_1 - \dots - u_p - b$$

بنابراین مسیر زیر، یک مسیر بین b, a است.

$$a - v_1 - \dots - v_r - y - w_1 - \dots - w_s - x - u_1 - \dots - u_p - b$$

حالت دوم: b, a به یک مولفه متعلق باشند.

فرض کنیم b, a به یک مولفه G مانند G_1 متعلق باشند. در این صورت یک مولفه دیگر از G مانند G_r را در نظر می‌گیریم. یک عنصر دلخواه از G_r مانند x را بگیرید. چون G_1 و G_r دو مولفه متفاوت از G هستند، پس بین x, a و نیز بین x, b مسیری

در G وجود ندارد. لذا، در \overline{G} مسیری بین a, x و مسیری بین x, b وجود دارد. این مسیرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a - v_1 - \dots - v_m - x$$

$$x - w_1 - \dots - w_n - y$$

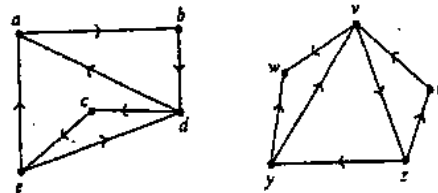
بنابراین، مسیر زیر یک مسیر بین a, b است:

$$a - v_1 - \dots - v_m - x - w_1 - \dots - w_n - y$$

پس، در هر حالت در \overline{G} بین a, b مسیری وجود دارد. لذا \overline{G} همبند است.

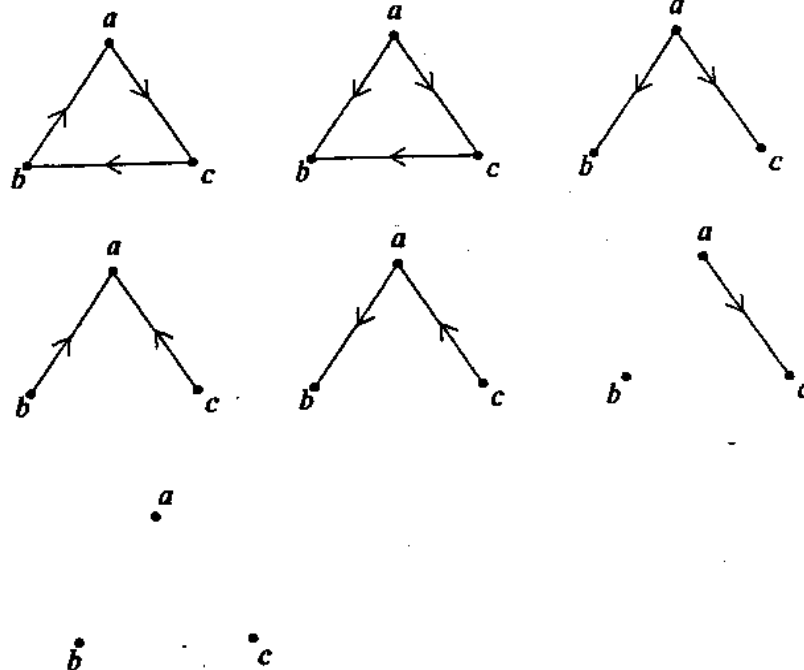
۲۶- الف) تمامی گراف‌های سودار (بدون حلقه) و غیریکریخت با سه رأس را پیدا کنید.

ب) آیا گراف‌های ارائه شده در زیر یکریخت هستند؟



پاسخ:

الف) گراف‌های زیر غیریکریخت هستند.



ب) در هر دو گراف تنها یک رأس از درجه چهار داریم. بنابراین رأس v با رأس d متناظر می‌شود.

برای اینکه مفهوم حادث بودن حفظ شود با مقایسه رأسهای با درجه ۳ و درجه ۴ متوجه می‌شویم که متناظر با یالهای $(e,d), (d,a)$ دو یال $(v,z), (v,v)$ وجود دارد. بنابراین تناظر زیر را باید داشته باشیم:

$$d \leftrightarrow v, a \leftrightarrow z, e \leftrightarrow y$$

اما با مقایسه رأسهای با درجه ۲. روشن است رأس w نمی‌تواند با هیچکدام از رأسهای گراف دیگر متناظر شود. بنابراین دو گراف مورد بحث یکرخت نیستند.

۲۷- الف) چند تا از زیرگرافهای k ، دارای سه رأس هستند (دو زیرگراف یکرخت، ولی با مجموعه رئوس متفاوت را، متفاوت در نظر بگیرید).

ب) چند تا از زیرگرافهای k ، چهار رأس دارند؟

ج) k ، چند زیرگراف دارد؟

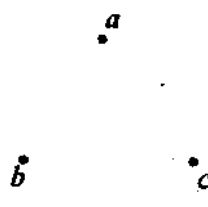
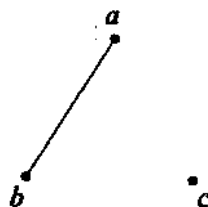
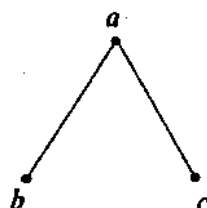
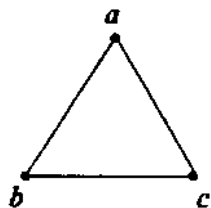
د) برای $n \geq 3$ ، k_n چند زیرگراف دارد؟

پاسخ:

الف) یک گراف کامل است بنابراین هر نوع گرافی که با استفاده از سه رأس k ،

ساخته شود یک زیرگراف k ، خواهد بود. ابتدا می‌دانیم به تعداد $\binom{6}{3}$ می‌توان از

میان ۶ رأس k ، ۳ رأس انتخاب کرد. از طرفی با ۳ رأس می‌توان ۴ گراف زیر را ساخت.



بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های k که دارای ۳ رأس هستند برابر است با:

$$4 \binom{6}{3} = 4 \frac{6!}{3!3!} = 80 \quad \left(= \left(\frac{3(3-1)}{2} + 1 \right) \binom{6}{3} \right)$$

ب) مانند (الف) ابتدا به تعداد $\binom{6}{4}$ می‌توان از میان ۶ رأس، ۴ رأس انتخاب نمود. از

طرفی تعداد گراف‌هایی که با ۴ رأس ساخته می‌شوند برابر است با:

$$\frac{4(4-1)}{2} + 1$$

بنابراین تعداد زیرگراف‌های k که چهار رأس دارند برابر است با:

$$\left(\frac{4(4-1)}{2} + 1 \right) \binom{6}{4}$$

تذکر: k یک گراف با چهار رأس است. بقیه گراف‌ها با چهار رأس از حذف ۲ و ۳ و ۴ یال از یال‌های k بدست می‌آیند. بنابراین تعداد گراف‌های با چهار رأس عبارتند از:

$$\frac{4(4-1)}{2} + 1$$

به همین ترتیب تعداد گراف‌های با k رأس برابر است با:

$$\frac{k(k-1)}{2} + 1$$

ج) زیرگراف‌های k می‌توانند با ۱ رأس، ۲ رأس، ... و ۶ رأس باشند. لذا با توجه به قسمت (ب) تعداد زیرگراف‌های k برابر است با:

$$\sum_{k=1}^6 \left(\frac{k(k-1)}{2} + 1 \right) \binom{6}{k}$$

د) با توجه به قسمت (ب) و (ج)، تعداد زیرگراف‌های k برابر است با:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k(k-1)}{2} + 1 \right) \binom{n}{k}$$

۲۸- برای گراف‌های G ارائه شده، در زیر، $|V|$ را حساب کنید.

الف) G ۹ یال دارد که درجه همه رئوس آن مساوی ۳ است.

ب) G یک گراف منتظم با ۱۵ یال است.

ج) G دارای ۱۰ یال، دو رأس از درجه ۴ و بقیه رئوس از درجه ۳ است.

پاسخ: \Rightarrow

الف) با توجه به لم ۱-۶ داریم:

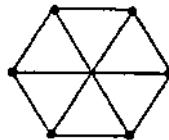
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times 9 = 18$$

اما بنا به فرض $\deg(v) = 3$ ، بنابراین

$$\sum_{v \in V} 3 = 18 \Rightarrow 3|V| = 18 \Rightarrow |V| = 6$$

می‌توان گراف G را به صورت زیر در نظر گرفت.



ب) با توجه به لم ۱-۶ داریم:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times 15 = 30$$

اما، در یک گراف منتظم داریم:

$$\deg(v) = |V| - 1$$

بنابراین:

$$\sum_{v \in V} (|V| - 1) = 30 \Rightarrow |V|(|V| - 1) = 30$$

$$\Rightarrow |V|^2 - |V| - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (|V| - 6)(|V| + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |V| - 6 = 0 \\ |V| + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow |V| = 6, |V| = -5$$

که $|V| = 6$ قابل قبول است.

(ج)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times 10$$

$$\Rightarrow 2 \times 4 + (|V| - 2) \times 3 = 20$$

$$\Rightarrow |V| = 6$$

۲۹- اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند با $|E|=|V|$ ، $\deg(v) \geq 2$ برای همه رئوس $v \in V$ باشد، در این صورت بیشترین مقدار $|V|$ چقدر است؟

پاسخ:

فرض کنیم $\deg(v) = k \geq 2$ در این صورت بنا به لم ۶-۱ داریم:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} k = 2V \Rightarrow KV = 2V \Rightarrow K = 2$$

که با فرض $k \geq 3$ متناقض است. بنابراین، چنین مسأله‌ای غیرممکن است.

۳۰- $G=(V,E)$ ، یک گراف بی‌سو (بدون حلقه) است که در آن برای هر $v \in V$ ، $\deg(v) \geq k \geq 1$ نشان دهید که G مسیری به طول k دارد.

پاسخ:

از یک رأس G مانند a_1 شروع می‌کنیم. چون $\deg(a_1) = k \geq 1$ بنابراین a_1 با یک رأس مانند a_2 مجاور است. لذا، از a_1 به a_2 رفته یال مربوطه را حذف می‌نمایم. اگر $k=1$ آنگاه حکم تمام است. در غیر اینصورت با توجه به اینکه $1 \leq k-1$ یال a_2 باقیمانده است لذا a_2 با یک رأس مانند a_3 مجاور است. بنابراین از a_2 به a_3 رفته یال مربوطه را حذف می‌کنیم. اگر $k=2$ حکم تمام است. در غیر اینصورت الگوریتم بالا را تا جایی ادامه می‌دهیم که یک مسیر با طول k بدست آید.

۳۱- الف) نشان دهید که چرا گرافی خطی همبند (بدون حلقه) با ۸ رأس، با درجه رئوس ۷، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۱، ۱ وجود ندارد.

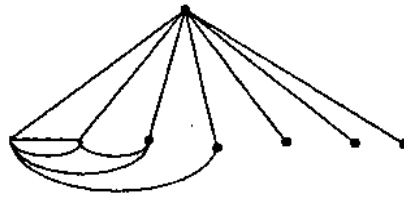
ب) مثالی از یک گراف چندگانه همبند (بدون حلقه) با ۸ رأس، با درجه رئوس ۷، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۱، ۱ ارائه دهید.

پاسخ:

الف) گراف مورد نظر یک رأس با درجه ۷ دارد. بنابراین این رأس باید به تمام رأس‌های دیگر یالی داشته باشد. با رسم این یالها، رأس با درجه ۷ و سه رأس با درجه ۱ نمی‌توانند یالی دریافت کنند. لذا فقط ۴ رأس باقیمانده می‌توانند یال دریافت

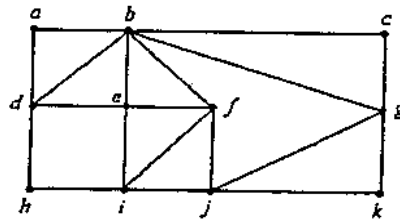
کنند. از میان ۴ رأس فوق یک رأس با درجه ۵ است. این رأس یک یال از رأس درجه ۷ دریافت کرده است. بنابراین باید ۴ یال به رأسهای دیگر داشته باشد، در حالیکه تنها ۳ رأس برای دریافت یال باقیمانده است. پس گرافی خطی با مشخصات خواسته شده وجود ندارد.

(ب)



۳۲- الف) یک مدار اولری برای گراف زیر ارائه دهید.

ب) اگر یال $\{d, e\}$ را از این گراف حذف کنیم، مسیر اولری برای گراف باقیمانده ارائه دهید.



پاسخ:

الف) مدار زیر را در نظر بگیرید:

$a, b, c, g, b, f, j, g, k, j, i, f, e, i, h, d, e, b, d, a$

ب) مسیر اولری زیر را در نظر بگیرید:

$d, b, a, d, h, i, e, f, i, j, f, b, c, g, k, j, g, b$

۳۳- مقدار و یا مقادیری از n را پیدا کنید که برای آن (آن‌ها)، گراف K_n مدار اولری داشته

باشد. به ازای چه مقادیری از n ، K_n دارای مسیر اولری است ولی مدار اولری ندارد؟

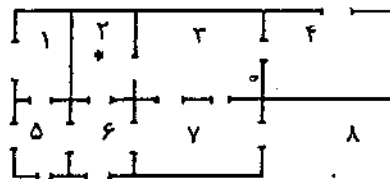
پاسخ:

بنا به قضیه ۱-۶، گراف G دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر رأسی از درجه فرد نداشته باشد. می‌دانیم، در K_n درجه هر رأس برابر است با $n-1$ بنابراین K_n دارای مدار اولری است. اگر و فقط اگر $n-1$ زوج باشد. یعنی n فرد ($n \geq 3$) باشد.

همچنین بنا به لم ۳-۶، گراف K_n زمانی دارای مسیر اولری است که حداکثر ۲ رأس از درجه فرد باشد. اما، تمام رأسهای K_n یا زوج هستند و یا فرد. لذا مانند قبل K_n

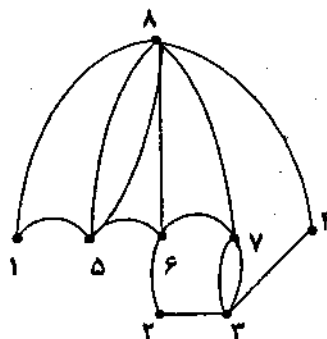
زمانی دارای مسیر اولری است که n فرد باشد. $(n \geq 3)$ همچنین برای $n=2$ نیز روشن است که k دارای مسیر اولری است.

۳۴- با شروع از نقطه علامت گذاری شده به وسیله ستاره در شکل زیر، می خواهیم از هفت اتاق و راهروی پیرامونی آنها به گونه ای عبور کنیم که از هر در، تنها و تنها یک بار گذشته باشیم. آیا این عمل امکان پذیر است؟



پاسخ :

محل ها و راهروی پیرامونی را به عنوان رأس و درها را به عنوان یال گراف در نظر می گیریم. در این صورت گراف زیر را خواهیم داشت :



تمام رئوس از درجه زوج هستند. بنابراین، بنا به قضیه ۱-۶، گراف فوق یک مدار اولری دارد. با توجه به اینکه یالهای گراف، جانشین درهای محل مورد بحث هستند لذا عمل مورد نظر امکان پذیر است.

۳۵- فرض کنید که G یک گراف بی سو (بدون حلقه) با $n \geq 3$ رأس است. اگر G ، تنها یک رأس از درجه زوج داشته باشد، \bar{G} چند رأس از درجه زوج دارد.

پاسخ :

برای یک درجه دلخواه از G مانند a ، با توجه به تعریف \bar{G} داریم:

$$(n-1) = (\text{درجه } a \text{ در } k_n) = (\text{درجه } a \text{ در } \bar{G}) + (\text{درجه } a \text{ در } G)$$

حال اگر درجه a در G فرد باشد آنگاه $\deg(a) = 2k + 1$ لذا

$$\deg(a) \text{ در } \overline{G} = (n-1) - (2k+1) = n-2k-2$$

$$= n - 2(k+1) = n - 2k'$$

اگر n زوج باشد آنگاه $n - 2k'$ نیز زوج خواهد بود و اگر n فرد باشد، آنگاه $n - 2k'$ نیز فرد خواهد بود.

حال اگر درجه a در G زوج باشد، آنگاه $\deg(a) = 2m$ ، لذا

$$\deg(a) \text{ در } \overline{G} = (n-1) - 2m = n - 2m - 1 = n - (2m+1) =$$

مانند بحث بالا، اگر n فرد باشد آنگاه درجه a در \overline{G} زوج و اگر n زوج باشد درجه a در \overline{G} فرد خواهد بود. مطالب بالا را به صورت زیر می توان جمع بندی نمود.

درجه a در G فرد باشد

اگر n زوج باشد \iff درجه a در \overline{G} زوج است.

اگر n فرد باشد \iff درجه a در \overline{G} فرد است.

درجه a در G زوج باشد.

اگر n زوج باشد \iff درجه a در \overline{G} فرد است.

اگر n فرد باشد \iff درجه a در \overline{G} زوج است.

۳۶- نشان دهید که برای هر گراف یا گراف چندگانه سودار $G=(V,E)$ رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v)$$

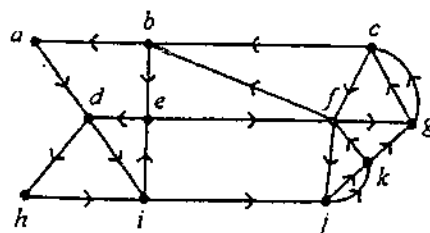
پاسخ:

در هر گراف، هر یال از گراف به یک رأس حادث و از یک رأس حادث است. بنابراین

هر یال، یک واحد به $\deg^-(v)$ و یک واحد به $\deg^+(v)$ می افزاید. در نتیجه رابطه

داده شده برقرار است.

۳۷- برای گراف سودار زیر، یک مدار اولری ارائه دهید.



پاسخ:

مدار زیر را در نظر بگیرید:

$a, d, h, i, j, k, g, c, b, e, d, i, e, f, j, k, f, g, c, f, b, a$

۳۸- نشان دهید که هر گراف سوداری که مدار اولری داشته باشد، قویاً همبند است. آیا عکس موضوع هم صحت دارد؟

☞ پاسخ:

فرض کنیم گراف سودار دارای مدار اولری باشد. این مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$v_1 - v_r - \dots - v_{n-1} - v_n - v_1$$

دو رأس دلخواه مانند v_r, v_s را در نظر می‌گیریم. این رأسها در مدار فوق ظاهر شده‌اند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنیم v_r, v_s به صورت زیر در مدار ظاهر شده‌اند:

$$v_1 - \dots - v_{r-1} - v_r - v_{r+1} - \dots - v_{s-1} - v_s - v_{s+1} - \dots - v_n - v_1$$

در این صورت

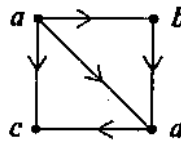
$$v_r - v_{r+1} - \dots - v_{s-1} - v_s$$

یک مسیر از v_r به v_s و

$$v_s - v_{s+1} - \dots - v_n - v_1 - v_r - \dots - v_{r-1} - v_r$$

یک مسیر از v_r به v_s است. بنابراین گراف مورد بحث قویاً همبند می‌باشد.

برای رد عکس موضوع به مثال نقضی زیر توجه کنید:



این گراف قویاً همبند است. اما، درجه ورودی و خروجی هر رأس برابر نیست.

$$\deg^-(a) \neq \deg^+(a), \deg^-(d) \neq \deg^+(d)$$

لذا، بنا به قضیه ۶-۲، گراف بالا دارای مدار اولری نمی‌باشد.

۳۹- نشان دهید که اگر با حذف جهت یال‌ها در گراف سودار G ، گراف کامل K_n حاصل شود،

آنگاه رابطه زیر برای گراف G برقرار است:

$$\sum_{v \in V} [\deg^+(v)]^r = \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r$$

☞ پاسخ:

از اینکه در هر گراف کامل K_n ، درجه هر رأس برابر $n-1$ است. بنابراین برای هر رأس

G خواهیم داشت:

$$\deg^+(v) + \deg^-(v) = n-1$$

$$\Rightarrow \deg^+(v) = (n-1) - \deg^-(v)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow [\deg^+(v)]^r &= [(n-1) - \deg^-(v)]^r \\
 \Rightarrow [\deg^+(v)]^r &= (n-1)^r - r \deg^-(v)(n-1) + [\deg^-(v)]^r \\
 \Rightarrow \sum_{v \in V} [\deg^+(v)]^r &= \sum_{v \in V} (n-1)^r - r(n-1) \sum_{v \in V} \deg^-(v) + \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r \quad (1)
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه در K_n ، هر رأس دارای درجه $n-1$ می باشد بنابراین:

$$\sum_{v \in K_n} \deg(v) = n(n-1) \quad (2)$$

همچنین برای هر رأس v ، بین گراف سودار G و K_n (که از حذف جهت یالهای G بدست آمده است) رابطه زیر برقرار است:

$$\deg_{K_n}^+(v) + \deg_{K_n}^-(v) = \deg_G(v) \quad (3)$$

لذا، از ۳ و ۲ نتیجه می شود که

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) + \sum_{v \in V} \deg^-(v) = n(n-1)$$

با استفاده از تمرین ۳۶ از رابطه اخیر بدست می آوریم:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) + \sum_{v \in V} \deg^-(v) = n(n-1)$$

$$\Rightarrow r \sum_{v \in V} \deg^-(v) = n(n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \frac{n(n-1)}{r}$$

با جاگذاری رابطه اخیر در (۱) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V} [\deg^+(v)]^r &= \sum_{v \in V} (n-1)^r - r(n-1) \sum_{v \in V} \deg^-(v) + \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r \\
 &= n(n-1)^r - r(n-1) \frac{n(n-1)}{r} + \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r \\
 &= n(n-1)^r - n(n-1)^r + \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r \\
 &= \sum_{v \in V} [\deg^-(v)]^r
 \end{aligned}$$

۴۰- فرض کنید که $V = (0, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$

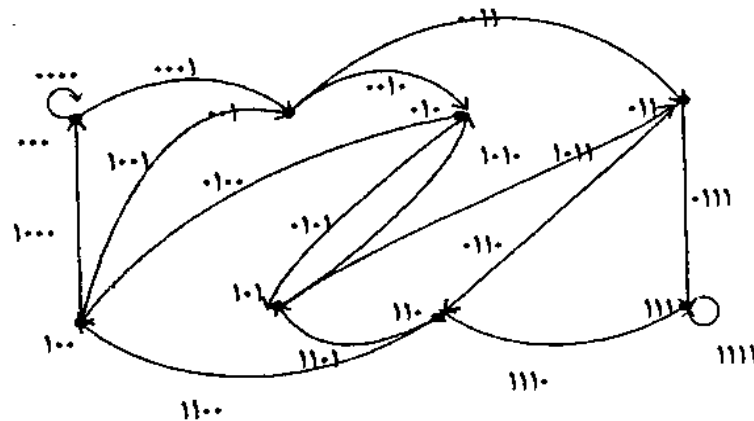
الف) گراف سودار $G = (V, E)$ را به شرح زیر رسم کنید. برای هر رشته چهار بیتی $b_1 b_2 b_3 b_4$ یالی از عنصر $b_1 b_2 b_3 b_4$ به عنصر $b_1 b_2 b_3 b_4$ در V رسم کنید.

ب) یک مدار اولری سودار برای G ارائه دهید.

ج) یک آرایش مدور از هشت ۰ و هشت ۱، در روی دایره‌ای (در جهت چرخش عقربه‌های ساعت) به گونه‌ای ارائه دهید تا در آرایه حاصل از ۱۶ بیت مزبور، رشته زیرآرایه‌های متوالی ۴ بیتی، نمایشگر اعداد صفر الی ۱۵ در مبنای دو باشند.

پاسخ:

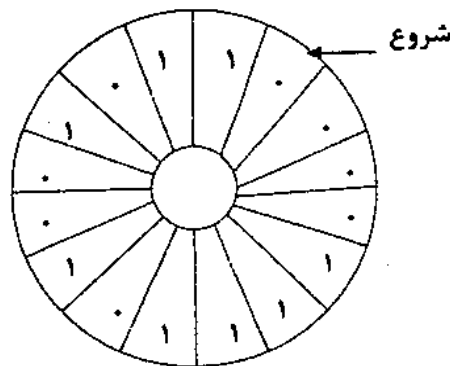
(الف)



ب) از رأس ۰۰۰۰ شروع می‌کنیم. یک مدار اولری را با استفاده از یالهای گراف در زیر آورده‌ایم:

۰۰۰۰ و ۰۰۰۱ و ۰۰۱۰ و ۰۰۱۱ و ۰۱۰۰ و ۰۱۰۱ و ۰۱۱۰ و ۰۱۱۱ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۱ و ۱۰۱۰ و ۱۰۱۱ و ۱۱۰۰ و ۱۱۰۱ و ۱۱۱۰ و ۱۱۱۱ و ۰۰۰۰

ج) آرایش مدور خواسته شده با استفاده از مدار بالا، به صورت زیر است:



۴۲- نشان دهید که در یک گراف خطی بی‌سو و بدون حلقه $G=(V,E)$ ، با $|V| \geq 2$ دو رأس مثل u, w وجود دارند به گونه‌ای که $deg(u)=deg(w)$.

پاسخ :

اگر G هیچ رأس از درجه صفر نداشته باشد آنگاه درجه رئوس G می تواند یکی از اعداد $1, 2, \dots, n-1$ باشد. رئوس G را به عنوان کبوتر و اعداد $1, 2, \dots, n-1$ را به عنوان لانه در نظر می گیریم. چون تعداد رئوس (n) بیشتر از تعداد لانه ها است لذا، بنا به اصل لانه کبوتر حداقل ۲ رأس وجود دارد که درجه آنها مساوی است.

حال اگر G یک رأس از درجه صفر داشته باشد، آنگاه درجه هر رأس از 1 تا $n-1$ رأس باقیمانده، یکی از اعداد $1, 2, \dots, n-2$ می تواند باشد. لذا مجدداً بنا به اصل لانه کبوتر حداقل ۲ رأس با درجه مساوی وجود دارد. اما اگر G دو رأس از درجه صفر داشته باشد آنگاه این دو رأس همان مطلوب است.

۴۳- علی و همسرش اکرم، سه زوج دیگر را به میهمانی دعوت کرده اند. در این میهمانی، تعدادی سلام رد و بدل شده است. اما می دانیم که،

(۱) کسی به خودش سلام نکرده است.

(۲) کسی به همسرش سلام نکرده است.

(۳) هر شخص، به شخص دیگر، حداکثر یک بار سلام کرده است.

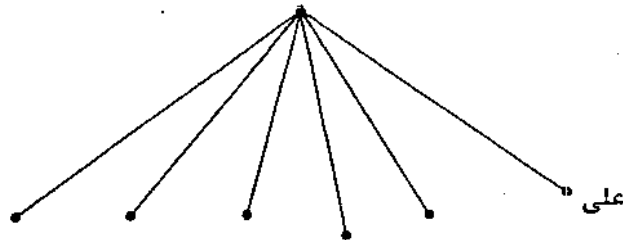
قبل از رفتن میهمانان، علی از هر کدام از آنها می پرسد که چند بار سلام کرده اند. از هر کدام از هفت نفر، جواب های متمایز می شنود. حال بگویید خود علی چند بار سلام کرده است؟ همسر وی چند بار سلام کرده است؟

پاسخ :

افراد حاضر در مجلس را به عنوان رأس های گراف در نظر می گیریم. بین دو رأس یالی رسم می کنیم اگر و فقط اگر بین دو نفر متناظر سلامی رد و بدل شده باشد. با توجه به فرض های مسأله، یک گراف خطی بی سو و بدون حلقه خواهیم داشت که درجه هر رأس آن حداکثر ۶ می باشد.

با توجه به اینکه هفت نفر، جواب های متمایز داده اند بنابراین هفت رأس گراف بدون در نظر گرفتن علی، دارای درجه رئوس $0, 1, 2, \dots, 6$ خواهند بود. رأس با درجه صفر را کنار می گذاریم که ممکن است همسر علی باشد. لذا زیرگرافی با شش رأس بدست می آوریم که درجه یکی از رئوس آن ۶، دیگری $5, 4, 3, 2, 1, 0$ می باشد. که علی هیچکدام از رئوس فوق نیست. (ممکن است درجه رأس علی با یکی از درجه های فوق برابر باشد).

حال علی را به زیر گراف اضافه کرده، گراف را با خصوصیات فوق رسم می‌کنیم.



حال برای ایجاد یک رأس از درجه ۵، ناچاریم یکی از رأسهای با درجه ۱ را انتخاب کرده با حفظ خطی بودن گراف ۴ یال به رأس‌های دیگر رسم کنیم. که در این صورت هیچ رأسی از درجه ۱ باقی نمی‌ماند. اما، این نشدنی است زیرا بنا به فرض لازم است حداقل یک رأس از درجه ۱ داشته باشیم. بنابراین، مسأله مورد بحث نشدنی است. ۴۴- نشان دهید که اگر هر یالی را از گراف K_5 حذف کنیم، گراف حاصل هامنی خواهد بود. آیا این موضوع برای $K_{r,r}$ نیز صادق است؟

پاسخ:

فرض کنیم یک یال از گراف K_5 حذف کرده‌ایم. در این صورت گراف حاضر را G می‌نامیم روشن است G با K_5 یکریخت نیست. همچنین G نمی‌تواند با K_5 همریخت باشد، زیرا G و K_5 هر دو پنج رأس دارند و اگر الگوریتم زیر بخش‌ها مقدماتی روی یکی از گرافهای فوق اجرا شود، گراف حاصل دیگر پنج رأس نخواهد داشت و نمی‌توان دیگری را از آن بدست آورد.

از طرفی G با $K_{r,r}$ نیز همریخت نمی‌باشد. چرا که G دارای ۵ رأس و $K_{r,r}$ دارای ۶ رأس می‌باشد. بنابراین روش زیر بخش‌های مقدماتی را تنها یکبار می‌توانیم روی G اجرا کنیم. از اینکه G دارای ۳ رأس از درجه ۵ و دو رأس از درجه ۴ است لذا با یکبار اجرای الگوریتم زیر بخش مقدماتی روی G ، نمی‌توان گراف $K_{r,r}$ را که دارای ۶ رأس و هر کدام از درجه ۳ می‌باشد را به دست آورد. در نتیجه بنا به قضیه کوراتاوسکی، گراف G هامنی است.

۴۵- الف) چند رأس و چند یال در گراف‌های دو بخشی کامل $K_{r,r}$ ، $K_{r,r+1}$ ، $K_{r,n}$ وجود دارد؟

ب) اگر گراف $K_{m,n}$ دارای mn یال است، آنگاه m چقدر است؟

ج) با توجه به تعداد یال‌ها در گراف‌های K_{m+n} ، $K_{m,n}$ و $\bar{K}_{m,n}$ ، رابطه ترکیباتی زیر را ثابت کنید:

$$C_{m+n}^r - mn = C_m^r + C_n^r$$

پاسخ :

الف) گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ دارای دو بخش است که رئوس یک بخش آنرا با V_1, \dots, V_m و رئوس بخش دیگر را با W_1, \dots, W_n نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه از هر رأس V_i ($1 \leq i \leq m$) که تمام رأسهای W_j ($1 \leq j \leq n$) یالی وجود دارد بنابراین تعداد کل یالها برابر است با:

$$e = mn$$

همچنین روشن است که

$$V = m + n$$

در نتیجه برای $K_{7,7}$ داریم:

$$e = 49, \quad V = 14$$

همچنین برای $K_{7,11}$ نیز داریم:

$$e = 77, \quad V = 18$$

ب) با توجه به الف باید داشته باشیم:

$$e = 72 = 12m \Rightarrow m = 6$$

ج) گراف دو بخشی $K_{m,n}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V_1, \dots, V_m رأسهای بخش اول و W_1, \dots, W_n رأسهای بخش دوم گراف باشد. می‌دانیم در $K_{m,n}$ از هر رأس بخش اول به تمام رأسهای بخش دوم یالی وجود دارد و بالعکس. همچنین بین رأسهای هر بخش هیچ یالی وجود ندارد. بنابراین در $\bar{K}_{m,n}$ بین V_i و W_j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) هیچ یالی وجود ندارد. از طرفی با توجه به ساختار $K_{m,n}$ ، در $\bar{K}_{m,n}$ به ازای هر r, s که در آن ($1 \leq s \leq n, 1 \leq r \leq m$) بین V_s و V_r یالی وجود دارد. به همین ترتیب بازای هر k, l که در آن $1 \leq L \leq n$ و $1 \leq k \leq n$ بین W_k, W_l یالی وجود دارد. در نتیجه $\bar{K}_{m,n}$ یک گراف غیرهمبند با دو مؤلفه K_m, K_n می‌باشد.

از طرفی داریم:

$$\text{تعداد یالها در } K_{m+n} = \text{تعداد یالها در } \bar{K}_{m,n} + \text{تعداد یالها در } K_{m,n}$$

$$\Rightarrow mn + (\text{تعداد یالها در } K_m + \text{تعداد یالها در } K_n) = \text{تعداد یالها در } K_{m+n}$$

$$\Rightarrow mn + (C_m^r + C_n^r) = C_{m+n}^r$$

$$\Rightarrow C_{m+n}^r - mn = C_m^r + C_n^r$$

۴۶- آیا یک گراف دو بخشی می‌تواند شامل دوری به طول فرد باشد؟ توضیح دهید چرا؟

پاسخ:

نه خیر. فرض کنیم V_1, \dots, V_m رأس‌های بخش اول و W_1, \dots, W_m رأس‌های بخش دوم گراف باشد. با توجه به ساختار گراف دو بخشی، هر دور در این گراف به یکی از صورت‌های زیر است.

$$V_{i_1} - W_{j_1} - V_{i_2} - W_{j_2} - \dots - V_{i_r} - W_{j_r} - V_{i_1}$$

$$W_{k_1} - V_{l_1} - W_{k_2} - V_{l_2} - \dots - V_{l_r} - W_{k_1}$$

که در حالت اول، طول دور برابر $2s$ و در حالت دوم طول دور برابر $2r$ است. لذا، گراف دوبخشی نمی‌تواند شامل دوری به طول فرد باشد.

۴۷- فرض کنید که $G=(V, E)$ یک گراف همبند و بدون حلقه با تعداد رئوس $|V|=v$ باشد. نشان دهید که اگر $|E| > (\frac{v}{2})^2$ ، آنگاه G نمی‌تواند دوبخشی باشد.

پاسخ:

فرض کنیم بخش اول گراف شامل n رأس باشد. در این صورت با توجه به اینکه $|V|=v$ ، بخش دوم گراف شامل $v-n$ رأس خواهد بود. گراف دوبخشی بیشترین یال را زمانی دارد که کامل باشد. که در این صورت با توجه به تمرین ۴۵ این گراف دارای $e = n(v-n)$ یال خواهد بود. با استفاده از مشتق‌گیری معلوم می‌شود که عبارت فوق زمانی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم $n = \frac{v}{2}$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$e = (\frac{v}{2})^2$$

به عبارتی یک گراف دو بخشی با $|V|=v$ حداکثر می‌تواند $(\frac{v}{2})^2$ یال داشته باشد. لذا

اگر $e > (\frac{v}{2})^2$ آنگاه گراف نمی‌تواند دو بخشی باشد.

۴۸- الف) تمام گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V, E)$ با تعداد رئوس $|V|=6$ را پیدا کنید.

ب) چند تا از گراف‌های دوبخشی کامل و غیریکریخت $G=(V, E)$ در رابطه $|V|=n \geq 2$ صادق هستند؟

پاسخ :

الف) گرافهای دوبخشی کامل غیریکریخت با $|V|=6$ عبارتند از :

$$K_{1,5}, K_{2,2}, K_{3,1}$$

ب) با توجه به اینکه گرافهای $K_{p,q}$ و $K_{q,p}$ یکریخت هستند. بنابراین گرافهای دوبخشی کامل و غیریکریخت با $|V|=n \geq 2$ به صورت زیر هستند :

$$K_{r,n-r} \quad (r \leq \frac{n}{2}) \quad \text{یا} \quad (r \leq n-r)$$

۴۹- الف) فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$ گراف بی‌سو و بدون حلقه $G=(V,E)$ را به صورت زیر تشکیل دهید :

هر مجموعه دو عنصری از X نمایشگر یک رأس در V است .

اگر $v_1, v_2 \in V$ به ترتیب متناظر با زیر مجموعه‌های $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ از X هستند ، آنگاه ، $\{v_1, v_2\}$ یک یال از G است مشروط به اینکه ، $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$.

ب) G با چه گرافیکریخت است ؟

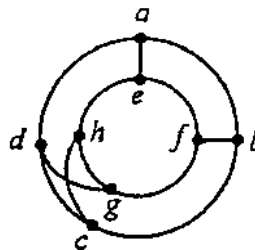
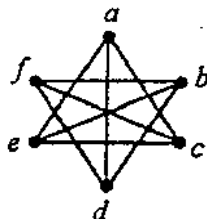
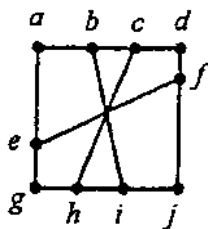
پاسخ :

الف) داریم :

$$V = \left\{ \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,4\}, \{4,5\}, \{5,5\} \right\}$$

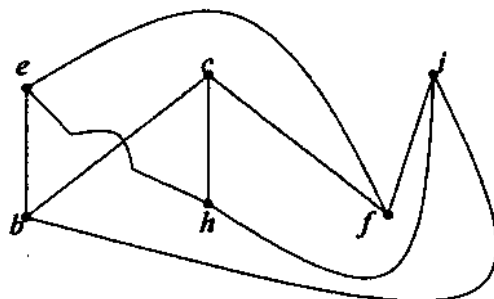
رأس‌های $\{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{4,4\}, \{5,5\}$ با درجه ۱۰ و بقیه رأسها با درجه ۶ خواهند بود .

۵۰- کدام یک از گرافهای زیر هامنی است ؟ اگر گرافیکریخت هامنی است آن را به گونه‌ای رسم کنید که یالهای آن تلاقی نداشته باشد و اگر هامنی نیست زیرگرافیکریخت از آن ، همریخت با K_5 و یا $K_{r,r}$ ارائه دهید .

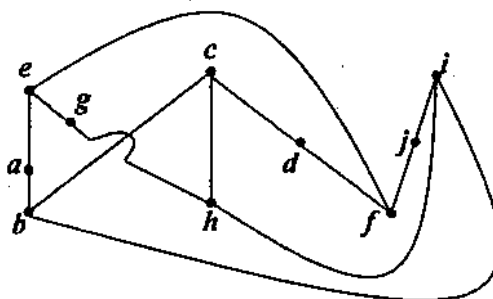


پاسخ :

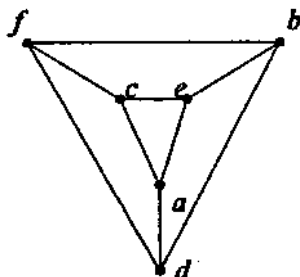
اولین گراف سمت چپ غیرهامنی است. زیرا با $K_{3,3}$ به صورت زیر همریخت است:



حال با افزودن به ترتیب j, d, a, g به روش زیربخش‌ها مقدماتی، گراف مورد بحث را که همریخت با گراف $K_{3,3}$ بالاست بدست می‌آوریم:



گراف وسط هامنی است. زیرا آن را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:



۵۱- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف همبند بی‌سو، بدون حلقه و هامنی است که در آن، درجه هر رأس مساوی ۴ است. اگر $|E|=16$ ، در این صورت چند ناحیه در گراف G وجود دارد؟

پاسخ:

می‌دانیم:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} 4 = 2 \times 16$$

$$\Rightarrow 4|V| = 32 \Rightarrow |V| = 8$$

لذا، با توجه به قضیه ۶-۶ داریم:

$$v - e + r = 2$$

$$\Rightarrow 8 - 16 + r = 2 \Rightarrow r = 10$$

لذا، گراف مورد بحث دارای ۱۰ ناحیه می‌باشد.

۵۲- اگر G یک گراف همبند بدون حلقه و هامنی باشد، نشان دهید که رأسی مثل v در G وجود دارد بطوریکه $\deg(v) < 6$.

پاسخ:

فرض کنیم چنین نباشد. (فرض خلف) بنابراین برای هر رأس v در G خواهیم داشت:

$$\deg(v) \geq 6$$

در این صورت:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6|V|$$

$$\Rightarrow 2e \geq 6v \Rightarrow e \geq 3v$$

و این متناقض با لم ۵-۶ است. بنابراین فرض خلف باطل است. یعنی، لااقل، یک رأس مانند v از G وجود دارد به طوریکه درجه آن کمتر از ۶ باشد.

۵۳- الف) فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف همبند بدون حلقه با $|V| \geq 11$ باشد. نشان دهید که یا G یا مکمل آن \bar{G} هامنی نیست.

ب) نتیجه قسمت (الف) برای $|V| \geq 9$ نیز صادق است، ولی اثبات حالت‌های $|V|=10$ و $|V|=9$ مشکل است. یک مثال نقض برای حالت $|V|=8$ در قسمت (الف) ارائه دهید.

پاسخ:

الف) فرض کنیم G یک گراف همبند بدون حلقه با $|V| \geq 11$ باشد به طوری که G و \bar{G} هر دو هامنی هستند. (فرض خلف) در این صورت اگر e تعداد یالهای G و \bar{e} تعداد یالهای \bar{G} باشد، با توجه به تعریف مکمل روشن است تعداد رأسهای \bar{G} که آنرا با \bar{v} نشان می‌دهیم در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\bar{v} \leq v = |V|$$

با توجه به فرض خلف، رابطه اخیر و از لم ۵-۶ نتیجه می‌شود که:

$$e \leq 3v - 6$$

$$\bar{e} \leq 3\bar{v} - 6 \leq 3v - 6$$

$$\Rightarrow e + \bar{e} \leq (3v - 6) + (3v - 6)$$

$$\Rightarrow e + \bar{e} \leq 6v - 12$$

از اینکه تعداد کل یالهای G به اضافه \bar{G} برابر تعداد یالهای K_v است ($v = |V|$) لذا از رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$\frac{v(v-1)}{2} \leq 6v - 12 \Rightarrow v(v-1) \leq 12v - 24$$

$$\Rightarrow v^2 - 13v + 24 \leq 0$$

اما، با توجه به جدول تعیین علامت مشخص می‌شود که بازای $v \geq 11$ داریم:

$$v^2 - 13v + 24 > 0$$

و این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است. یعنی یا G و یا \bar{G} هامنی نیست.

ب) ساختن مثال نقض برای حالت $|V| = 8$ ساده است. به خاطر اینکه شکل شلوغ است اینجا آنرا نمی‌آوریم.

۵۴- مثالی از یک گراف همبند ارائه دهید که:

الف) هم دارای مدار اولری و هم دارای دور هامیلتونی است.

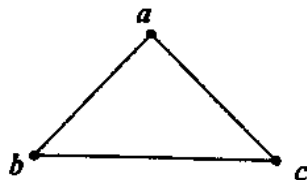
ب) دارای مدار اولری بوده ولی دور هامیلتونی نداشته باشد.

ج) مدار اولری نداشته ولی دور هامیلتونی داشته باشد.

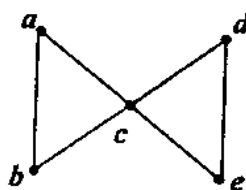
د) نه دارای مدار اولری و نه دارای دور هامیلتونی باشد.

پاسخ :

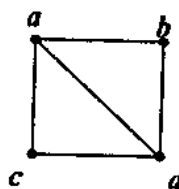
(الف)



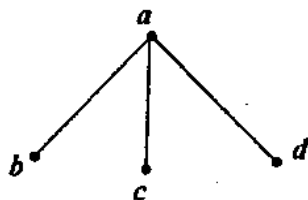
(ب)



(ج)



(د)

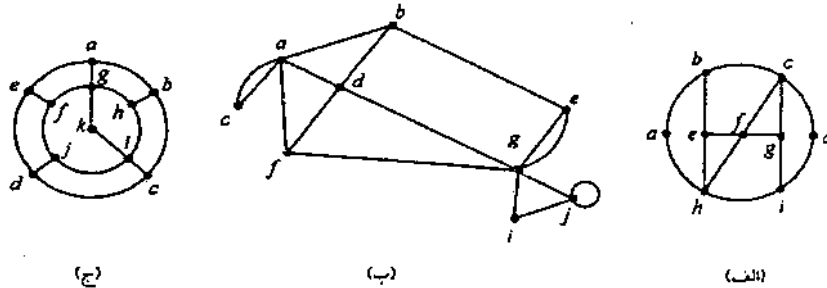


۵۵- چه نوع گرافهایی را می‌شناسید که هم دارای مسیر (مدار) اولری و هم دارای مسیر (دور) هامیلتونی هستند ؟

پاسخ :

گراف‌های کامل، K_{2n+1} ، دارای این خصوصیت می‌باشند.

۵۶- کدام یک از گراف‌های زیر دارای دور هامیلتونی است؟ گرافی که دور هامیلتونی ندارد، آیا دارای مسیر هامیلتونی است؟



پاسخ :

الف) یک دور هامیلتونی به صورت زیر است :

$b-a-h-e-f-g-i-d-c-b$

ب) گراف داده شده دارای دور هامیلتونی نیست. اما، یک مسیر هامیلتونی به صورت زیر دارد.

$i-j-g-e-b-d-f-a-c$

ممکن است مسیرهای دیگری هم موجود باشند.

ج) یک دور هامیلتونی به صورت زیر داریم :

$e-a-b-h-g-k-i-c-d-j-f-e$

۵۷- الف) نشان دهید که گراف پترسن که دور هامیلتونی ندارد، شامل مسیر هامیلتونی است.

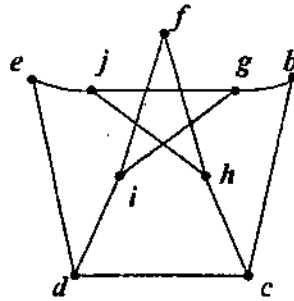
ب) نشان دهید که اگر یک رأس دلخواه (و بال‌های حادث با آن) را از گراف پترسن حذف کنیم، گراف حاصل دارای دور هامیلتونی است.

پاسخ :

الف) مسیر هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید :

$g-j-h-f-i-d-c-b-a-e$

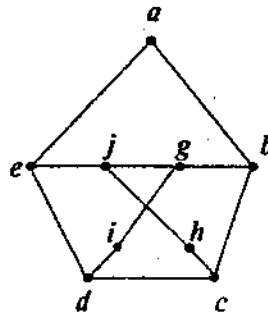
ب) اگر رأس حذف شده، یک رأس بیرونی باشد. (مثلاً رأس a) در این صورت گراف پترسن پس از حذف رأس a و یالهای مربوط به آن به صورت زیر در می آید:



که یک دور هامیلتونی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$g - j - e - d - i - f - h - c - b - g$$

اگر رأس حذف شده یک رأس درونی باشد. (مثلاً f) در این صورت گراف زیر را خواهیم داشت:



که این بار، یک دور هامیلتونی به صورت زیر به دست می آید:

$$g - i - d - e - a - b - c - h - j - g$$

با توجه به شکل متقارن گراف پترسن، هر رأس از این گراف با یالهای حادث آن حذف شود، گراف حاصل به یکی از دو صورت بالا در می آید. که در حالت، گراف حاصل دارای دور هامیلتونی می باشد.

۵۸-الف) برای $n \geq 3$ ، چند دور هامیلتونی متفاوت در گراف کامل K_n وجود دارد؟

ب) چند دور هامیلتونی با یالهای متمایز در K_{11} موجود است؟

ج) مثال ۷-۹ را برای تعداد ۱۹ دانشجو حل کنید.

پاسخ :

الف) مراحل مختلف ایجاد یک دور هامیلتونی در زیر آمده است :

- (۱) انتخاب یک نقطه شروع : n راه برای این انتخاب وجود دارد .
 - (۲) حرکت از نقطه شروع به رأس مجاور : $n-1$ رأس مجاور با نقطه شروع وجود دارد که می توان به هر کدام از آنها رفت .
 - (۳) حرکت از رأس دوم به رأس مجاور بعدی : با توجه به اینکه به رأس قبلی نباید برگردیم لذا $n-2$ راه برای رفتن به رأس بعدی داریم .
 - ⋮
 - (۴) حرکت از رأس k -ام به رأس بعدی : با توجه به اینکه در مرحله k -ام به رأس های قبلی نمی توانیم برگردیم لذا $n-k$ راه برای رفتن به رأس بعدی داریم .
- در مرحله آخر نیز تنها یک راه داریم و آن رفتن به رأس شروع است .
نکته آخر اینکه هر دور هامیلتونی در K_n دارای n رأس است . لذا اگر از هر رأس دوری مانند C شروع کنیم و C را طی کنیم هیچ تفاوتی نمی کند . پس، از میان دورهای بالا ، هر n دور مشابه هستند .

بنابراین تعداد کل دورهای هامیلتونی در K_n برابر است با :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

ب) یک دور هامیلتونی دلخواه از K_{11} در نظر گرفته ، همه یالهای آن را از گراف حذف می کنیم . با توجه به اینکه در K_{11} درجه هر رأس برابر ۲۰ است ، با حذف یالهای دور هامیلتونی در گراف حاضر درجه هر رأس برابر ۱۸ خواهد بود . مجدداً در گراف حاضر یک دور هامیلتونی در نظر گرفته سپس یالهای مرتبط با آن را حذف می کنیم . لذا گرافی با ۲۱ رأس به دست می آید که درجه هر کدام از رأسهای آن ۱۶ است . این کار را تا جایی ادامه می دهیم که همه یالهای K_{11} حذف شود . با توجه به روش فوق ، روشن است ۱۰ دور هامیلتونی برای K_{11} بدست می آید که یالهای متمایز دارند .
تذکر: هر گراف منتظم با n رأس ($n \geq 3$) که درجه رئوس آن بزرگتر یا مساوی ۲ باشد دور هامیلتونی دارد .

۵۹- الف) نشان دهید که برای $n \geq 2$ ، تعداد دورهای هامیلتونی متمایز در گراف $K_{n,n}$ ،

$$\frac{1}{2} (n-1)! n!$$

مساوی است .

ب) چند مسیر هامیلتونی متفاوت در $K_{n,n}$ ، $n \geq 1$ وجود دارد ؟

پاسخ :

الف) مراحل مختلف ایجاد یک دور هامیلتونی در یک گراف $K_{n,n}$ ، در زیر آمده است:

(۱) انتخاب نقطه شروع: $2n$ راه برای انتخاب این نقطه وجود دارد.
 (۲) حرکت از نقطه شروع به نقطه مجاور: با توجه به اینکه نقطه شروع در یک بخش و نقطه مجاور در بخش مقابل قرار دارد و هنوز هیچ رأسی از بخش مقابل انتخاب نشده است لذا n راه برای انتخاب رأس دوم وجود دارد.

(۳) حرکت از نقطه دوم به نقطه سوم: در این مرحله هنوز دو نقطه انتخاب شده است که با توجه به ساختار گراف دوبخشی نقطه شروع در بخش اول و نقطه دوم در بخش دوم قرار دارد و نقطه سوم لزوماً باید از بخش اول انتخاب شود. اما، یک نقطه از بخش اول به عنوان نقطه شروع انتخاب شده است لذا برای نقطه سوم $n-1$ انتخاب باقی می ماند.

(۴) حرکت از نقطه سوم به نقطه چهارم: نقطه سوم در بخش اول قرار دارد. پس نقطه چهارم باید از بخش دوم انتخاب شود. اما، از بخش دوم یک نقطه به عنوان رأس دوم انتخاب شده است بنابراین برای نقطه چهارم $n-2$ راه وجود دارد.

با ادامه مراحل فوق تعداد دورها بدست می آید. البته باید توجه کرد که در $K_{n,n}$ هر دو دارای $2n$ رأس است. اگر از هر نقطه دوری مانند C شروع کنیم و C را طی کنیم هیچ تفاوتی نمی کند. بنابراین، تعداد کل دورهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ برابر است با:

$$\frac{2n \times n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2) \dots (3)(3)(2)(2)(1)(1)}{2n} = (n-1)!n!$$

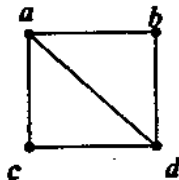
ب) تعداد مسیرهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ مانند قسمت الف محاسبه می شود. اما، باید دقت کرد که یک مسیر مانند S در $K_{n,n}$ دارای $2n$ رأس است و بر خلاف دور که در آنجا از هر نقطه دور شروع کنیم و همان دور را طی کنیم تفاوتی حاصل نمی شود. در مسیرها، هر مسیر یک نقطه ابتدایی و یک نقطه انتهایی متفاوت از نقطه ابتدایی دارد که باید از نقطه ابتدایی شروع کرده به سمت نقطه انتهایی حرکت کنیم. لذا، تعداد کل مسیرهای هامیلتونی در $K_{n,n}$ برابر است با:

$$2n \times n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2) \dots (3)(3)(2)(2)(1)(1) = 2n! \times n!$$

۶۰- فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو بدون حلقه است. اگر G دارای هیچ دوری به طول فرد نباشد، آنگاه نشان دهید که G یک گراف دوبخشی است.

پاسخ:

مساله فوق در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال نقض به گراف زیر توجه کنید:



۶۱- الف) فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف بی‌سو دوبخشی با افراز $V = V_1 \cup V_2$ است. نشان دهید که اگر $|V_1| \neq |V_2|$ ، آنگاه G دور هامیلتونی ندارد.

ب) نشان دهید که اگر گراف G در قسمت (الف) دارای مسیر هامیلتونی باشد، در این صورت $|V_1| - |V_2| = \pm 1$.

ج) مثالی از یک گراف بی‌سو دوبخشی و همبند مثل $G=(V,E)$ ، که در آن $V = V_1 \cup V_2$ ، $|V_1| = |V_2| - 1$ و G فاقد مسیر هامیلتونی است، ارائه دهید.

پاسخ:

الف) برای ایجاد یک دور هامیلتونی با توجه به تمرین ۵۹، ابتدا رأسی را از یکی از بخش‌های گراف انتخاب کرده، رأس بعدی را از بخش مقابل انتخاب می‌کنیم. پس از این انتخاب رأس بعدی را از بخش مقابل انتخاب می‌کنیم. این کار را متناوباً تا جایی ادامه می‌دهیم که یک دور هامیلتونی به دست آید. این کار به خاطر ساختار خاص گراف دوبخشی خودبخود اتفاق می‌افتد و به سلیقه شخص بستگی ندارد. لذا، روش فوق نشان می‌دهد که برای ایجاد یک دور هامیلتونی باید رأس‌های دو بخش متناظر باشند.

به عبارتی باید داشته باشیم $|V_1| = |V_2|$. لذا، اگر $|V_1| \neq |V_2|$ آنگاه نمی‌توان دور هامیلتونی بدست آورد.

ب) با توجه به روش ایجاد مسیر هامیلتونی در گراف دوبخشی، رأس شروع مسیر با رأس بعدی خود از بخش مقابل متناظر است. به همین ترتیب رأس‌های هر بخش با رأس‌های بخش مقابل متناظر هستند. تنها استثناء برای آخرین رأس مسیر هامیلتونی است که لزومی ندارد با رأسی متناظر شود. زیرا قرار نیست به رأسی وصل شود.

بنابراین بخش‌های گراف از لحاظ تعداد رأس می‌توانند حداکثر به تعداد یک رأس متفاوت باشند. در نتیجه:

$$|V_1| - |V_2| = \pm 1$$

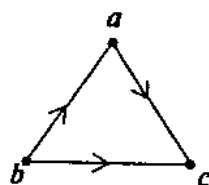
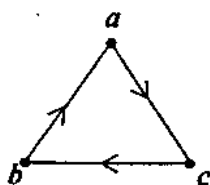
(ج)



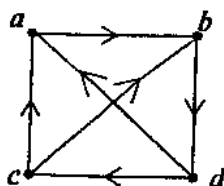
۶۲- الف) تمام چرخه‌های غیریکریخت به سه رأس را مشخص کنید.
 ب) تمام چرخه‌های غیریکریخت با ۴ رأس را مشخص کنید. درجه‌های ورودی و خروجی تک‌نک رنوس این گراف‌ها را فهرست کنید.

پاسخ:

الف) داریم:

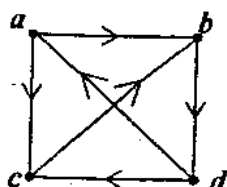


(ب)



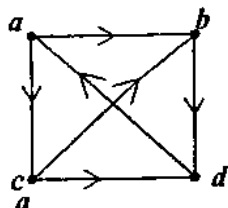
$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^+(c) = \deg^+(d) = 2$$

$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^-(c) = \deg^-(d) = 1$$



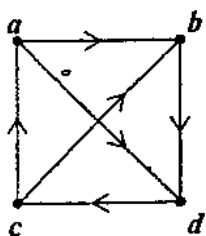
$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = \deg^-(d) = 1$$

$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = \deg^+(d) = 2$$



$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = \deg^-(c) = \deg^+(d) = 1$$

$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = \deg^+(c) = \deg^-(d) = 2$$

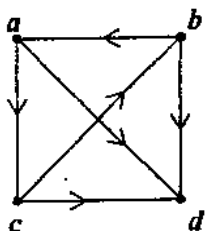


$$\deg^-(a) = \deg^+(b) = 1$$

$$\deg^+(a) = \deg^-(b) = 2$$

$$\deg^+(c) = \deg^-(d) = 2$$

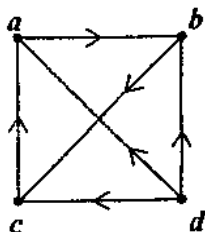
$$\deg^-(c) = \deg^+(d) = 0$$



$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = 1$$

$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = 2$$

$$\deg^-(d) = 2, \quad \deg^+(d) = 0$$



$$\deg^+(a) = \deg^+(b) = \deg^+(c) = 1$$

$$\deg^-(a) = \deg^-(b) = \deg^-(c) = 2$$

$$\deg^-(d) = 0, \quad \deg^+(d) = 2$$

۶۳- علی و همسرش ۱۰ نفر را به میهمانی دعوت کرده‌اند. در این گروه ۱۲ نفری، هر نفر، ۶ نفر دیگر را می‌شناسد. نشان دهید که ۱۲ نفر، به گونه‌ای دور یک میز گرد می‌توانند بنشینند که هر نفر، با دو نفر نشسته در دو طرفش، آشنا باشد.

پاسخ:

افراد گروه را به عنوان رأسهای یک گراف در نظر می‌گیریم. بین دو رأس یالی رسم می‌کنیم. هرگاه دو نفر متناظر با هم آشنا باشند، بنا به فرض مساله، هر نفر، ۶ نفر دیگر را می‌شناسد. لذا، در گراف ما، هر رأس با درجه ۶ خواهد بود. این گراف ۱۲

کاملترین حل مسائل ساختمان گسسته

رأس دارد. پس بنا به قضیه ۵-۶، دارای یک دور هامیلتونی است. (برای هر رأس دلخواه مانند w, v داریم: $\deg(v) + \deg(w) = 6 + 6 = 12$ پس کافی است افراد، بر اساس دور هامیلتونی بدست آمده کنار هم بنشینند، که در این صورت هر نفر با دو نفر نشسته در دو طرف خود، آشنا خواهد بود.

۶۴- فرض کنید که $G=(V, E)$ یک گراف ۶-منتظم بی‌سو و بدون حلقه است. نشان دهید که اگر $|V|=11$ ، آنگاه G دارای یک دور هامیلتونی است.

پاسخ:

در گراف ۶-منتظم، درجه هر رأس برابر ۶ می‌باشند. از آنجا که $|V|=11$ ، بنابراین برای هر دو رأس دلخواه، از G نمودار از مانند w, v داریم:

$$\deg(v) + \deg(w) = 6 + 6 > 11$$

لذا، بنا به قضیه ۵-۶، G دارای یک دور هامیلتونی است.

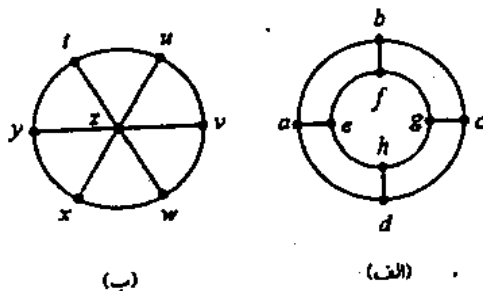
۶۵- فرض کنید که $G=(V, E)$ یک گراف بی‌سو است. یک زیرمجموعه I از V را مستقل گوئیم هرگاه، هیچ دو رأسی در آن مجاور نباشد. یک مجموعه مستقل I ، ماکزیمال گفته می‌شود هرگاه بازای هر رأس دلخواه $v \in V$ ، $I \cup \{v\}$ مستقل نباشد. عدد استقلال G با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود، تعداد رئوس بزرگ‌ترین مجموعه مستقل ماکزیمال در G تعریف می‌شود.

الف) برای گراف‌های ارائه شده در زیر، دو مجموعه مستقل ماکزیمال با اندازه‌های مختلف پیدا کنید.

ب) $\beta(G)$ را برای هر کدام از گراف‌ها پیدا کنید.

ج) $\beta(G)$ را برای هر کدام از گراف‌های $K_{1,3}(1)$ ، $K_{2,2}(2)$ ، $K_{3,2}(3)$ ، $K_{4,2}(4)$ ، $K_{5,2}(5)$ ، $K_{m,n}(6)$ پیدا کنید.

د) اگر $G=(V, E)$ با $|V|=n$ و $|E|=m$ باشد، در این صورت چند زیرمجموعه ۲-عنصری از V مستقل هستند؟



پاسخ :

الف) برای شکل (الف) ، دو مجموعه زیر ماکزیمال هستند :

$$\{a, h, c, f\} , \{b, e, d, g\}$$

برای شکل (ب) دو مجموعه زیر ماکزیمال هستند :

$$\{t, w, u\} , \{z\}$$

ب) برای گراف (الف) داریم : $\beta(G) = 4$

برای گراف (ب) داریم : $\beta(G) = 3$

ج) با توجه به ساختار گراف $K_{m,n}$ داریم :

$$\beta(G) = \max\{m, n\}$$

در نتیجه :

$$\beta(K_{r,r}) = 3 , \beta(K_{r,r}) = 3 , \beta(K_{r,r}) = 3$$

$$\beta(K_{r,r}) = 4 , \beta(K_{r,r}) = 6$$

د) در گراف کامل هیچ زیرمجموعه ۲ عنصری مستقل نیستند . اما اگر یالی را از گراف کامل حذف کنیم آنگاه رأس‌های ابتدایی و انتهایی آن یال مستقل خواهد بود . همین کار را می‌توان ادامه دارد . لذا ، به ازای حذف هر یال از K_n ، یک مجموعه ۲ عضوی مستقل به دست می‌آید .

حال با توجه به اینکه اگر $|V| = n$ آنگاه K_n دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است . بنابراین به

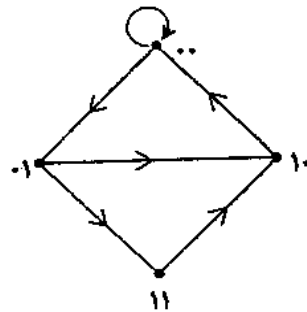
تعداد $m - \frac{n(n-1)}{2}$ یال حذف شده داریم . پس ، به همین تعداد مجموعه ۲ عنصری

مستقل نیز خواهیم داشت .

۶۶- یک مدار الکترونیکی ، برای شناسایی رشته‌ای از صفر و یک‌ها ساخته شده است . این مدار ، رشته‌هایی به شکل 01010 را می‌تواند شناسایی کند که در آن ، 0 به مفهوم هر تعداد (از جمله هیچ تعداد) از صفرهاست . برای مثال 0110 و 100010 رشته‌های مورد قبول هستند . گراف سوداری تشکیل دهید که دارای یک رأس v_1 (به نام رأس ابتدایی) ، یک رأس v_r (به نام رأس انتهایی) بوده و هر رأس آن دارای دو یال خروجی با برچسب‌های 0 و 1 به گونه‌ای باشد که هر مسیر از v_1 به v_r ، رشته‌ای به صورت 01010 تولید کند .

پاسخ :

گراف زیر را در نظر بگیرید :



رأس ابتدایی ۰۱ و رأس انتهایی ۱۰ می باشد. به عنوان مثال برای تولید رشته های ۰۱۱۰ و یا ۰۱۰۱۰ می توان مسیرهای زیر را در نظر گرفت :

۰۱۱۰ : $۰۱ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۱۰$

۰۱۰۱۰ : $۰۱ \rightarrow ۱۰ \rightarrow \dots \rightarrow ۰۱ \rightarrow ۱۰$

۶۸- گرافی را خود مکمل گوئیم هرگاه یکریخت با مکمل خودش باشد.

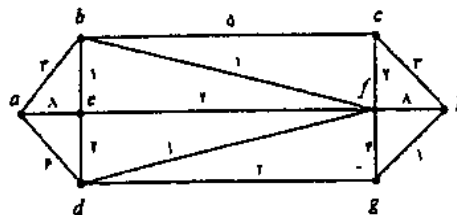
الف) گرافی خود مکمل با ۴ رأس ارائه دهید.

ب) گرافی خود مکمل با ۵ رأس ارائه دهید.

پاسخ :

تمرین فوق را در مساله ۲۳ حل کرده ایم.

۶۹- گراف شکل زیر، یک کانال ارتباطی و نیز زمان ارتباط بین هشت مرکز ارتباطی را نشان می دهد. مراکز ارتباطی، به وسیله رئوس، کانال ها به وسیله یال ها، و زمان ارتباط (به دقیقه) در هر کانال، به وسیله وزن یال مربوطه مشخص شده اند. فرض کنید که در ساعت معینی (مثلاً ۳ بعد از ظهر) خبری از مرکز a به وسیله کانال های آن پخش می شود. مراکز دیگر نیز به نوبه خود، این خبر را، به محض دریافت، پخش خواهند کرد. برای مراکز ارتباطی h, g, f, e, d, c, b کوتاه ترین زمان دریافت خبر را به دست آورید.



پاسخ :

با استفاده از الگوریتم دیکسترا ، کوتاهترین زمان دریافت خبر برای هر کدام از رأس‌ها عبارتست از :

$$b : 2(a)$$

$$c : 6(a, b, f)$$

$$d : 5(a, b, f)$$

$$e : 4(a, b)$$

$$f : 4(a, b)$$

$$g : 7(a, b, f, d)$$

$$h : 8(a, b, f, d, g)$$

۷۰- الف) آیا K_7 مدار اولری دارد ؟ آیا دارای دور هامیلتونی است ؟

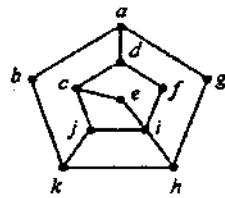
ب) قسمت (الف) را برای K_7 تکرار کنید .

پاسخ :

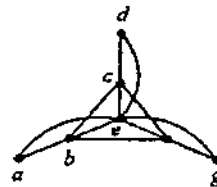
الف) در K_7 ، تمام رئوس با درجه ۲۹ هستند . بنابراین با توجه به قضیه ۱-۶ و لم ۴-۶ ، K_7 مدار اولری ندارد . اما ، دور هامیلتونی دارد .

ب) در K_7 هر رأس با درجه ۳ می‌باشد . لذا با توجه به قضیه ۱-۶ و لم ۴-۶ ، K_7 دور هامیلتونی دارد . اما مدار اولری ندارد .

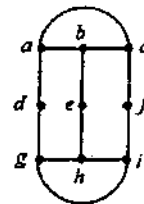
۷۱- آیا گراف‌های زیر دور هامیلتونی دارند ؟



(الف)



(ب)



(ج)

پاسخ :


الف) در مثال ۷-۶ دیدیم که گراف داده شده ، دور هامیلتونی ندارد .

ب) با توجه به خاصیت تقارن گراف داده شده با بررسی راه‌های مختلف روشن است گراف فوق دور هامیلتونی ندارد .

ج) با بررسی مشخص می‌شود که گراف داده شده دور هامیلتونی ندارد .

۷۲- با استفاده از الگوریتم وارشال، نشان دهید که گراف سودار G ، تعریف شده به وسیله ماتریس رابطه (ماتریس همایگی) زیر، همبند قوی است:

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: 

با استفاده از الگوریتم وارشال، بهستار متعددی $W_k = M_G$ به صورت زیر خواهد بود:

$k=1$ در ستون اول هیچ عددی ظاهر نشده است. بنابراین:

$$W_1 = W_0$$

$k=2$:

$$p_1=1, \quad p_2=2; \quad q_1=2, \quad q_2=2$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=3$:

$$p_1=1, \quad p_2=2, \quad p_3=3; \quad q_1=3, \quad q_2=4$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=4$:

$$p_1=1, \quad p_2=2, \quad p_3=3; \quad q_1=5$$

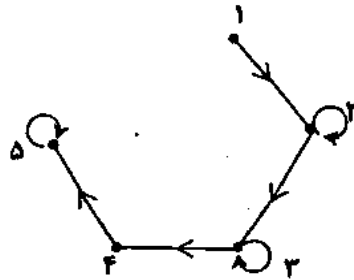
$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: k = 5$$

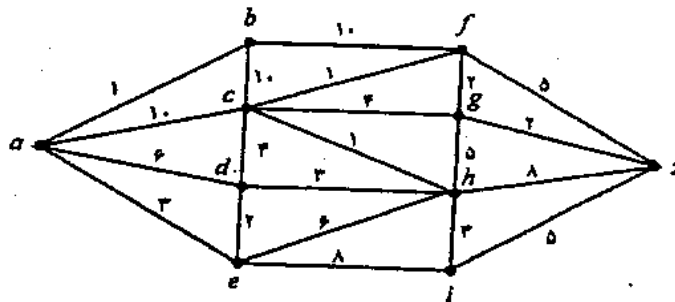
$$p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 4, p_5 = 5; q_1 = 5$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از آنجا که تمام عناصر W_5 عدد ۱ نمی باشد. این مطلب نشان می دهد که گراف مورد بحث همبند قوی نمی باشد. این مطلب از روی نمودار گراف نیز واضح است :

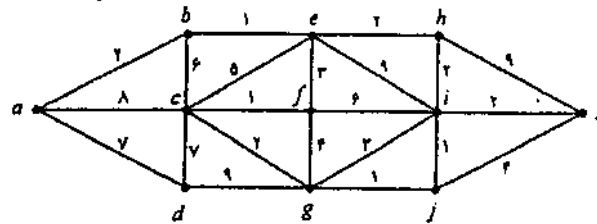


در تمرین های ۷۳ الی ۷۶. با استفاده از الگوریتم دیکسترا، کوتاه ترین مسیر از a به z را تعیین کنید. مراحل مختلف را به صورت نمودار نمایش دهید.
-۷۳



پاسخ :

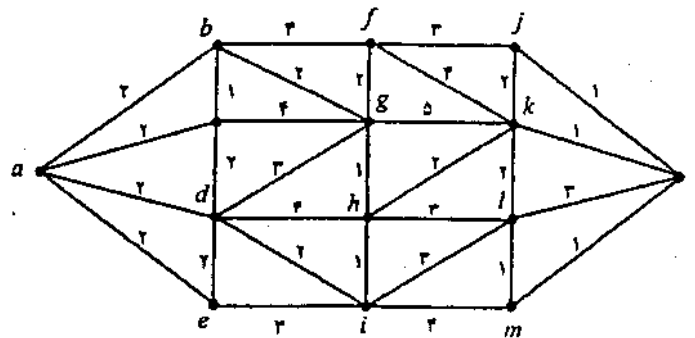
با استفاده از الگوریتم دیکسترا، کوتاه ترین مسیر به صورت زیر به دست می آید :
 $14(a, e, d, h, c, f, g, z)$



پاسخ:

داریم:

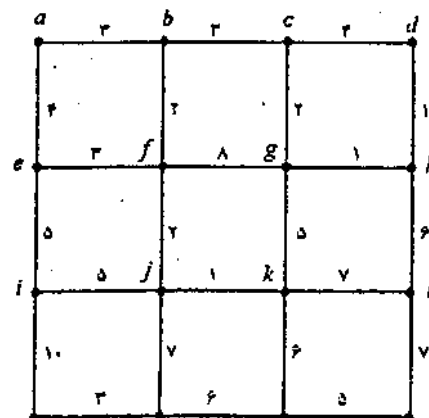
$$9(a, b, e, h, i, z)$$



پاسخ:

داریم:

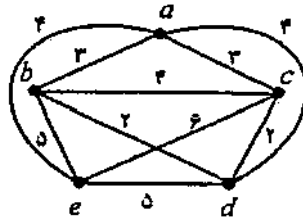
$$8(a, b, g, h, k, z)$$



پاسخ :

$۱۹(a, b, f, j, k, o, z)$

در تمرین‌های ۷۷ و ۷۸، با استفاده از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه، یک دور هامیلتونی نیمه بهینه برای گراف داده شده، به دست آورید.
-۷۷

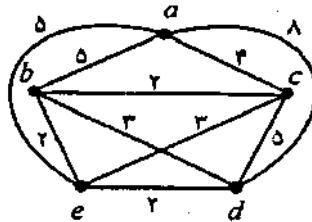


پاسخ :

با استفاده از الگوریتم نزدیک‌ترین همسایه دور زیر را خواهیم داشت :

$a - c - d - b - e - a$

-۷۸



پاسخ :

داریم :

$a - c - b - e - d - a$