

حل تمرینات کتاب ساختمان گسسته

کرداورنده:

Pnu-Soal.ir

فصل دوم

تمرینات فصل دوم

۱- فرض کنید که A مجموعه اعداد گویای غیر صفر باشد. برای $a, b \in A$ رابطه R در A را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$aRb \Leftrightarrow a/b \in \mathbb{Z}$$

رابطه R کدام یک از خواص زیر را داراست و چرا؟

(الف) بازتابی (ب) متقارن (ج) ضدمتقارن (د) متعدی

پاسخ:

(الف) رابطه داده شده بازتابی است. زیرا

$$\forall a \in A: \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRa$$

(ب) رابطه داده شده متقارن نیست. چرا که

$$\frac{2}{1} = 2 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

پس $1R2$ ولی $2 \not R 1$

(ج) رابطه R ضدمتقارن است. زیرا اگر aRb , bRa . آنگاه از اینکه aRb عدد صحیح

m وجود دارد به طوریکه $\frac{a}{b} = m \in \mathbb{Z}$ از طرفی bRa پس $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ اما

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{m} \in \mathbb{Z}, \text{ و این تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم } m=1 \text{ یعنی } \frac{a}{b} = 1.$$

پس $a=b$

(د) رابطه R متعدی است. چرا که اگر aRb , bRc آنگاه اعداد صحیح n, m وجود دارند

$$\text{بطوریکه } \frac{b}{c} = n, \frac{a}{b} = m \text{ پس}$$

$$a = mb, c = \frac{b}{n} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{mb}{\frac{b}{n}} = mn \in \mathbb{Z}$$

پس aRc

۲- فرض کنید که $A = R \times R$ که در آن R مجموعه اعداد حقیقی است. اگر $p = (x, y)$ نقطه‌ای از A باشد، برای دو نقطه a, b از A ، رابطه R در A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$aRb \Leftrightarrow b, a \text{ به یک فاصله از } p \text{ باشند}$$

نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی در A است. کلاس‌های هم‌ارزی آن را به دست آورید.

پاسخ:

بازتابی: اگر $a \in A$ روشن است که aRa .

تقارن: اگر $a, b \in A$ ، aRb آنگاه فاصله b, a از p به یک فاصله است به طور معادل فاصله a, b از p به یک فاصله است لذا bRa .

تعدی: اگر $a, b, c \in A$ ، aRb ، bRc در این صورت فاصله b, a از p برابر و مساوی با عددی مانند r می‌باشد. از طرفی از اینکه bRc فاصله c, b نیز از p برابر است. اما، فاصله b از p برابر r می‌باشد. در نتیجه فاصله c از p نیز r خواهد بود، لذا از اینکه فاصله a از p نیز برابر r است پس aRc .

۳- نشان دهید که اگر S, R دو رابطه هم‌ارزی باشند، آنگاه $R \cup S$ الزاماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

پاسخ:

فرض کنیم $A = \{a, b, c\}$. رابطه‌های R و S را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$$

در این صورت R و S دو رابطه هم‌ارزی روی A هستند. اما داریم:

$$R \cup S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$$

داریم $(b, a) \in R \cup S$ ، $(a, c) \in R \cup S$ ، اما $(b, c) \notin R \cup S$ پس $R \cup S$ لزوماً یک رابطه هم‌ارزی نیست.

۴- فرض کنید که S, R در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده باشند

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (4, 2)\}$$

$$S = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

SoR را به دست آورید.

پاسخ:

$$SoR = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1)\}$$

۵- فرض کنید که $R = \{(x, y) \mid x = yz, z > 1; x, y, z \in \mathbb{Z}^+\}$

(الف) $R \cap R^{-1}$ را حساب کنید.

(ب) آیا R یک رابطه بازتابی است؟ آیا R متقارن است؟ چرا؟

(ج) نشان دهید که $RoR \subseteq R$.

(د) بستر متعدی R را به دست آورید.

پاسخ:

(الف) داریم:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid x = yz, z > 1; x, y, z \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$R \cap R^{-1} = \emptyset$$

اگر $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ آنگاه

$$(x, y) \in R \Rightarrow \exists z > 1 : x = yz$$

$$(x, y) \in R^{-1} \Rightarrow \exists z' > 1 : y = xz'$$

$$\Rightarrow x = yz \Rightarrow x = (xz')z = xz'z \Rightarrow z'z = 1$$

اما $z > 1$, $z' > 1$ پس $1 < z'z$ و این یک تناقض است. پس $R \cap R^{-1} = \emptyset$

(ب) روشن است R بازتابی نیست. زیرا برای هر $x \in \mathbb{Z}^+$ نمی توان $z > 1$ را چنان یافت که $x = xz$.

از طرفی با توجه به الف $R \cap R^{-1} = \emptyset$ پس R متقارن نیز نمی باشد.

(ج) فرض کنیم $(x, y) \in RoR$ در این صورت S ای هست به طوریکه

$$(s, y) \in R, (x, s) \in R$$

در نتیجه $z_1, z_2 > 1$ وجود دارند به گونه ای که

$$x = sz_1, s = yz_2 \Rightarrow x = (yz_2)z_1 \Rightarrow x = y(z_2z_1)$$

از اینکه $z_1 > 1, z_2 > 1$ نتیجه می شود $z_2z_1 > 1$. پس $(x, y) \in R$ لذا

$$RoR \subseteq R$$

(د) از اینکه $RoR \subseteq R$ ، نتیجه می شود که $RoR \subseteq R$ و $RoRoR \subseteq RoR$ و ... پس

$$R^1 \cup R = R \text{ و } R^2 \cup R^1 \cup R = R \text{ و } \dots$$

لذا

$$R^\infty = R \cup R^1 \cup R^2 \cup \dots = R$$

تذکر: البته به طور مستقیم نیز می‌توان ثابت کرد R متعدی است. زیرا اگر (y, z) و (x, y) هر دو عضو R باشند آنگاه

$$\exists s_1 > 1 : x = ys_1, \quad \exists s_r > 1 : y = zs_r \\ \Rightarrow x = ys_1 = (zs_r)s_1 = z(s_rs_1) \Rightarrow (x, z) \in R$$

عناصر R به صورت زیر می‌باشند:

$$R = \{(2,1), (3,1), (4,1), \dots, (4,2), (6,2), (8,2), \dots, (6,3), (9,3), (12,3), \dots\}$$

۶- نشان دهید که اگر R یک رابطه از A به B ، S و T دو رابطه از B به C باشند آنگاه:

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R) \quad (\text{الف})$$

$$(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R) \quad (\text{ب})$$

پاسخ:

(الف)

داریم:

$$\begin{aligned} (x, z) \in (S \cup T) \circ R &\Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R, (y, z) \in (S \cup T) \\ &\Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge [(y, z) \in S \vee (y, z) \in T] \\ &\Leftrightarrow \exists y : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S] \vee [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in T] \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in S \circ R \vee (x, z) \in T \circ R \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in (S \circ R) \cup (T \circ R) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

(ب)

داریم:

$$\begin{aligned} (x, z) \in (S \cap T) \circ R &\Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in (S \cap T) \\ &\Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge [(y, z) \in S \wedge (y, z) \in T] \\ &\Leftrightarrow \exists y : [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S] \wedge [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in T] \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in S \circ R \wedge (x, z) \in T \circ R \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in (S \circ R) \cap (T \circ R) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

- ۷- فرض کنید که R_1 و R_2 دو رابطه در A باشند. کدام یک از عبارات زیر درست است و چرا؟
- (الف) اگر R_1 و R_2 بازتابی باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز بازتابی است.
- (ب) اگر R_1 و R_2 متقارن باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز متقارن است.
- (ج) اگر R_1 و R_2 ضدمتقارن باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز ضدمتقارن است.
- (د) اگر R_1 و R_2 متعدی باشند آنگاه $R_1 \circ R_2$ نیز متعدی است.

پاسخ :

(الف) درست. اگر R_1, R_2 بازتابی باشند. آنگاه بازای هر $x \in A$:

$$(x, x) \in R_1, (x, x) \in R_2 \Rightarrow (x, x) \in R_1 \circ R_2$$

پس $R_1 \circ R_2$ بازتابی است.

(ب) نادرست. فرض کنیم

$$A = \{a, b, c\}, R_1 = \{(a, b), (b, a)\}, R_2 = \{(a, c), (c, a)\}$$

در این صورت R_1, R_2 متقارن هستند. در حالیکه $R_1 \circ R_2$ متقارن نیست. زیرا:

$$R_1 \circ R_2 = \{(b, c)\}$$

(ج) نادرست. فرض کنید

$$A = \{a, b, c\}, R_1 = \{(a, b), (c, a)\}, R_2 = \{(a, a), (b, c)\}$$

در این صورت R_1, R_2 ضدمتقارن هستند. در حالیکه $R_1 \circ R_2$ ضدمتقارن نیست. زیرا:

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, b), (b, a)\}$$

روشن است $a(R_1 \circ R_2)b$, $b(R_1 \circ R_2)a$, در حالیکه $a \neq b$

(د) نادرست. فرض کنید

$$A = \{a, b, c, d, e\}, R_1 = \{(a, d), (b, e)\}, R_2 = \{(c, a), (d, b)\}$$

در این صورت R_1, R_2 هر دو متعدی هستند. در حالیکه $R_1 \circ R_2$ چنین نمی باشد. زیرا

$$R_1 \circ R_2 = \{(c, d), (d, e)\}$$

داریم

$$(d, e) \in R_1 \circ R_2, (c, d) \in R_1 \circ R_2$$

در حالیکه $(c, e) \notin R_1 \circ R_2$.

۸- فرض کنید که S و R دو رابطه در Z باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{9}$$

$$aSb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{6}$$

$(R \cup S)^\infty$ و $A/(R \cup S)^\infty$ را به دست آورید.

پاسخ:

اگر رابطه‌های R_1, R_2, \dots, R_k به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$aR_1b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n_1}$$

$$aR_2b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n_2}$$

\vdots

$$aR_kb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n_k}$$

آنگاه $S = (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k)^\infty$ که در آن S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$aSb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{d}$$

در اینجا d بزرگترین مقسوم علیه مشترک n_1, n_2, \dots, n_k می‌باشد.

از اینکه $3 = (9, 6)$ پس

$$a(R \cup S)^\infty b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$A/(R \cup S)^\infty = \{\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}\}$$

۹- فرض کنید که R و S دو رابطه در A باشند. نشان دهید که برای همه مقادیر $n \geq 1$ داریم:

$$(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

پاسخ:

فرض کنید $a(R \cap S)^n b$ این بدین معنی است که مسیری به طول n از a به b

در $R \cap S$ وجود دارد. بنابراین هر n یال این مسیر، هم در R و هم در S واقع

هستند. پس $aR^n b$ ، $aS^n b$ در نتیجه $a(R^n \cap S^n)b$ پس

$$(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$$

۱۰- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و R و S دو رابطه هم‌ارزی تعریف شده در A به وسیله

ماتریس‌های روابط زیر باشند.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) بزرگترین رابطه هم‌ارزی مشمول در R و S کدام است ؟

(ب) کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R و S چیست ؟

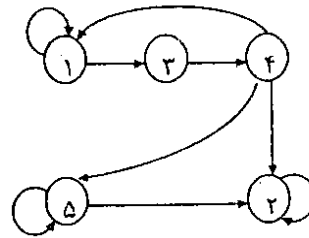
پاسخ :

چون R و S خود روابط هم‌ارزی می‌باشند. لذا بزرگترین رابطه هم‌ارزی مشمول در R خود R و کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R نیز خود R می‌باشد. در مورد S نیز همین‌طور است.

همچنین، از اینکه $M_S \subseteq M_R$ و R و S روابط هم‌ارزی می‌باشند، لذا بزرگترین رابطه هم‌ارزی که هم مشمول در R و هم مشمول در S باشد، S و کوچکترین رابطه هم‌ارزی که هم شامل R و هم شامل S باشد، R است.

۱۱- با استفاده از الگوریتم وارshall بستر متعددی روابط زیر را به دست آورید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



پاسخ :

(الف) قرار می‌دهیم

$$W_k = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا W_1 را پیدا می‌کنیم. بنابراین $k = 1$ ، W_k دارای مقدار ۱ در مکان اول و چهارم ستون اول نیز دارای مقدار ۱ در مکان اول و چهارم سطر اول است بنابراین W_1 همان W_k است به اضافه یک مقدار جدید ۱ در مکان $(4,4)$:

(در مکانهای $(1,1)$ ، $(1,4)$ ، $(4,1)$ ، $(4,4)$ باید عدد ۱ قرار دهیم که چون $(1,1)$ ، $(1,4)$ و $(4,1)$ مقدار ۱ را دارند پس مقدار ۱ فقط به مکان $(4,4)$ اضافه می‌شود.)

$$:(p_1 = 1, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W_r نیز با $(k=2)$ با استفاده از W_1 به صورت زیر به دست می آید:

$$:(p_1 = 2, p_r = 5; q_1 = 2)$$

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای W_r ($k=3$) نیز داریم:

$$W_r = W_r$$

برای W_r, W_5 نیز بدست می آوریم:

$$:(p_1 = 1, p_r = 3, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4)$$

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$:(p_1 = 3, p_r = 5; q_1 = 2, q_r = 5)$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = M_{R_\infty}$$

ب) ابتدا رابطه S را به صورت ماتریسی نمایش می دهیم:

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قرار می‌دهیم $W_s = M_s$ ، سایر W ها در زیر آمده است:

$$: (p_1 = 1, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 3)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 2, p_r = 4, p_r = 5; q_1 = 2)$$

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 2, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4)$$

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 1, p_r = 3, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 2, q_r = 3, q_r = 4, q_s = 5)$$

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 1, p_r = 3, p_r = 4, p_r = 5; q_1 = 2, q_r = 5)$$

$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_s = M_{s_m} \text{ لذا}$$

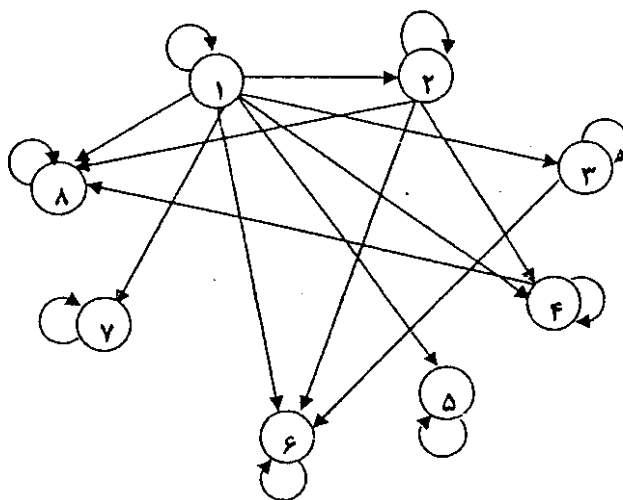
۱۲- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. اگر R رابطه بخش پذیری تعریف شده در A باشد، در این صورت گراف سودار R را رسم کنید.

پاسخ:

داریم:

$$R = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8) \right\}$$

گراف سودار R به صورت زیر است.



۱۳- فرض کنید که A مجموعه اعداد گویای غیر صفر باشد. برای $a, b \in A$ ، رابطه R در A را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$aRb \Leftrightarrow a/b \text{ عدد صحیحی باشد}$$

نشان دهید که R بازتابی و متعدی است. ولی، نه متقارن است و نه ضدمتقارن.

پاسخ:

در تمرین ۱ نشان دادیم که رابطه بالا بازتابی، متعدی و ضدمتقارن است. اما متقارن نمی‌باشد.

۱۴- گروهی متشکل از ۱۷ سارق، کیسه‌ای از شمش‌های طلا را به سرقت می‌برند. در موقع تقسیم شمش‌ها به طور مساوی بین سارقین، سه شمش طلا باقی می‌ماند. به دنبال نزاع بر سر اینکه چه کسی صاحب شمش‌های باقیمانده شود، یکی از سارقین کشته می‌شود. شمش‌ها، بار دیگر بین افراد باقی مانده تقسیم می‌شوند و این بار ۱۰ شمش باقی می‌ماند. این بار نیز یکی از سارقین بر سر تقسیم شمش‌های باقیمانده کشته می‌شود. شمش‌ها دوباره بین

سارقین تقسیم می‌شود (احتمالاً به طور مساوی، زیرا این بار سارقی کشته نمی‌شود).
کمترین تعداد شمش‌های به سرقت رفته چقدر است؟

پاسخ:

فرض کنیم تعداد شمش‌ها برابر x باشد. فرض می‌کنیم وقتی برای اولین بار سارق‌ها اقدام به تقسیم شمش‌ها می‌کنند به هر کدام k_1 شمش می‌رسد و ۳ شمش باقی می‌ماند در این صورت خواهیم داشت:

$$17k_1 + 3 = x$$

پس از کشته شدن یک سارق، ۱۶ نفر باقی می‌ماند. این بار فرض کنیم به هر کدام k_r شمش می‌رسد. با توجه به اینکه ۱۰ شمش نیز باقی می‌ماند خواهیم داشت:

$$16k_r + 10 = x$$

و در نهایت پس از کشته شدن یکی دیگر از سارق‌ها، ۱۵ سارق باقی می‌ماند. فرض می‌کنیم این بار موقع تقسیم شمش‌ها به هر نفر k_r شمش برسد. در نتیجه

$$15k_r = x.$$

از سه رابطه بدست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 17k_1 + 3 = 16k_r + 10 \\ 16k_r + 10 = 15k_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{16k_r + 7}{17} \\ k_r = \frac{15k_r - 10}{16} \end{cases}$$

چون مساله، یک مساله تقسیم شمش بدون بریدن شمش‌هاست، لذا روشن است که k_1, k_r, k_r اعداد طبیعی می‌باشد. پس ما برای حل مساله به دنبال کوچکترین k_r ای هستیم که عبارت زیر، یک عدد صحیح گردد:

$$k_1 = \frac{16k_r + 7}{17} = \frac{15k_r - 3}{17}, \quad k_r = \frac{15k_r - 10}{16}$$

کوچکترین عددی که مطلوبست $k_r = 262$ می‌باشد. بنابراین

$$x = 15k_r = 3930.$$

۱۵- فرض کنید که $A = B = R$ ، R و S روابطی در A باشند که ماتریس‌های روابط آن‌ها چنین تعریف شده‌اند:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید :

M_{SoS} (د)

M_{RoR} (ج)

M_{RoS} (ب)

M_{SoR} (الف)

پاسخ :

(الف)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{RoR} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۶- با استفاده از الگوریتم وارشال ، بستر متعددی رابطه زیر را به دست آورید :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

قرار می‌دهیم $W_k = M_R$. مراحل مختلف الگوریتم وارشال در زیر آمده است.

$$: (p_1 = 1, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4), k = 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 2, p_r = 3; q_1 = 2, q_r = 3), k = 2$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 2, p_r = 3; q_1 = 2, q_r = 3), k = 3$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 1, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4), k = 4$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روشن است $M_R = W_4$. در نتیجه R یک رابطه متعدی است.

۱۷- با فرض اینکه C, B, A ماتریس‌های بولی هستند، در این صورت روابط زیر را اثبات کنید:

$$A \vee A = A \text{ (الف)}$$

$$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C \text{ (ب)}$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \text{ (ج)}$$

پاسخ:

(الف)

$$(A \vee A)_{ij} = 1 \Leftrightarrow (A)_{ij} = 1 \text{ یا } (A)_{ij} = 1 \Leftrightarrow (A)_{ij} = 1$$

در نتیجه $A \vee A = A$. که در اینجا منظور از $(A)_{ij}$ مولفه (i, j) ام ماتریس A و $(A \vee A)_{ij}$ مولفه (i, j) ام ماتریس $A \vee A$ است.

(ب) با توجه به تعریف ضرب بولی ماتریسها داریم :

$$\begin{aligned} [A \odot (B \odot C)]_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \exists k : (A)_{ik} = 1, (B \odot C)_{kj} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k, \exists r : (A)_{ik} = 1, (B)_{kr} = 1, (C)_{rj} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists r : (A \odot B)_{ir} = 1, (C)_{rj} = 1 \\ &\Leftrightarrow [(A \odot B) \odot C]_{ij} = 1 \end{aligned}$$

در نتیجه $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

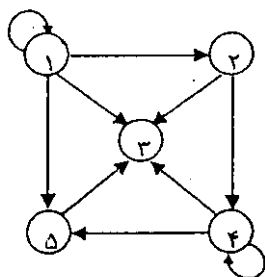
تذکر : در اینجا اندیس به منزله مولفه متناظر از ماتریس می باشد . مثلاً $(A)_{ik}$ نشان دهنده مولفه (i, k) ام ماتریس A است .

(ج)

$$\begin{aligned} [A \vee (B \wedge C)]_{ij} = 1 &\Leftrightarrow ((A)_{ij} = 1) \vee ((B)_{ij} = 1 \wedge (C)_{ij} = 1) \\ &\Leftrightarrow ((A)_{ij} = 1 \vee (B)_{ij} = 1) \wedge ((A)_{ij} = 1 \vee (C)_{ij} = 1) \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B)_{ij} = 1) \wedge ((A \vee C)_{ij} = 1) \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))_{ij} = 1 \end{aligned}$$

در نتیجه : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

۱۸- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و R یک رابطه در A باشد که گراف سودار آن به شکل روبه رو است . رابطه R کدام یک از خواص زیر را دارد ؟



(الف) بازتابی

(ب) ضدبازتابی

(ج) تقارن

(د) ضدمتقارن

(ز) متعدی

پاسخ :

(الف) R بازتابی نیست .

(ب) R ضدبازتابی نیست .

(ج) R در حالیکه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ متقارن نیست .

(د) R ضدمتقارن است . زیرا بازای هیچ دو عنصر متمایز از A مانند a, b ، رابطه های aRb ، bRa همزمان برقرار نیست .

(ز) R متعدی نیست . زیرا R در حالیکه ۱، ۲، ۴، ۵ متعدی نیست .

۱۹- فرض کنید که $A = \mathbb{Z}^+$ ، و رابطه R در A به صورت تعریف شده است :

$$aRb \Leftrightarrow GCD(a,b) = 1$$

رابطه R کدام یک از خواص زیر را دارد ؟ (مقصود از GCD بزرگترین بخش‌یاب مشترک دو عدد است.)

(الف) بازتابی (ب) ضدبازتابی (ج) تقارن (د) ضدمتقارن (ز) تعدی

پاسخ :

(الف) R بازتابی نیست زیرا مثلاً $2 \not R 2$ ($GCD(2,2) = 2$)

(ب) R ضدبازتابی نیست. زیرا $1 R 1$

(ج) R متقارن است. زیرا از نظریه اعداد می‌دانیم اگر a, b نسبت به هم اول باشند آنگاه a, b هم نسبت به هم اول خواهند بود. در نتیجه

$$(aRb \Leftrightarrow GCD(a,b) = 1) \Leftrightarrow (GCD(b,a) = 1 \Leftrightarrow bRa)$$

پس

$$aRb \Rightarrow bRa$$

(د) R ضدمتقارن نیست. زیرا مثلاً $2R5$ و $5R2$ درحالی‌که $2 \neq 5$

(ز) R متعدی نیست. زیرا مثلاً $2R7$ و $7R12$ درحالی‌که $2 \not R 12$

۲۰- رابطه R در A را «مدور» می‌گوییم که اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ ، آنگاه $(c,a) \in R$. نشان دهید که رابطه R بازتابی و مدور است، اگر و تنها اگر، R یک رابطه هم‌ارزی باشد.

پاسخ :

فرض کنیم R بازتابی و مدور باشد. ثابت می‌کنیم R هم‌ارزی است.

بازتابی: بنا به فرض برقرار است.

تقارن: از اینکه R بازتابی است پس $(a,a) \in R$ ، حال اگر $(a,b) \in R$ آنگاه از اینکه R مدور است خواهیم داشت $(b,a) \in R$. پس R متقارن نیز است.

تعدی: اگر $(a,b) \in R$ ، $(b,c) \in R$ آنگاه از اینکه R مدور است خواهیم داشت $(c,a) \in R$ و از اینکه R متقارن است بدست می‌آوریم $(a,c) \in R$. پس R متعدی نیز می‌باشد.

برعکس اگر فرض کنیم R هم‌ارزی است آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که R بازتابی و مدور نیز می‌باشد.

۲۱- فرض کنید که R و S دو رابطه هم‌ارزی و ماتریس‌های این روابط به شرح زیر باشند.

کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل R و S را به دست آورید.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

بنا به قضیه ۲-۱۵ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل S, R ، رابطه $(R \cup S)^*$ است.

ابتدا $M_{R \cup S}$ را پیدا می‌کنیم

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رابطه فوق متقارن و بازتابی است. کفایت با استفاده از الگوریتم وارشال به‌ستار

متعدی آن را نیز بیابیم. با فرض $W_k = M_{R \cup S}$ داریم:

$$: (p_1=1, p_2=2, p_3=3; q_1=1, q_2=2, q_3=2), k=1$$

$$W_1 = W_k$$

$$: (p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4; q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4), k=2$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$: (p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4; q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4), k=3$$

$$W_3 = W_2$$

$$: (p_1=1, p_2=2, p_3=3, p_4=4, p_5=5; q_1=1, q_2=2, q_3=3, q_4=4, q_5=5), k=4$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

W_4 رابطه‌ای را نشان می‌دهد که در آن تمام راسهای گراف با همدیگر رابطه دارند.

پس یک رابطه کامل بوده، لذا هم‌ارزی می‌باشد.

۲۲- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3\}$ و R رابطه‌ای در A باشد که به صورت زیر تعریف شده است :

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (3,1), (3,2)\}$$

بستار متعدی R یعنی R^∞ را با استفاده از فرمول زیر به دست آورید :

$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3}$$

پاسخ :

داریم :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۳- در مسئله قبل بستار متعدی R یعنی R^∞ را با استفاده از الگوریتم وارشال به دست آورید.

پاسخ :

با فرض $W_k = M_{R^k}$ داریم :

$$(p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3; q_1 = 1, q_2 = 2), k = 1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(p_1 = 1, p_2 = 3; q_1 = 1, q_2 = 3), k = 2$$

$$W_2 = W_1$$

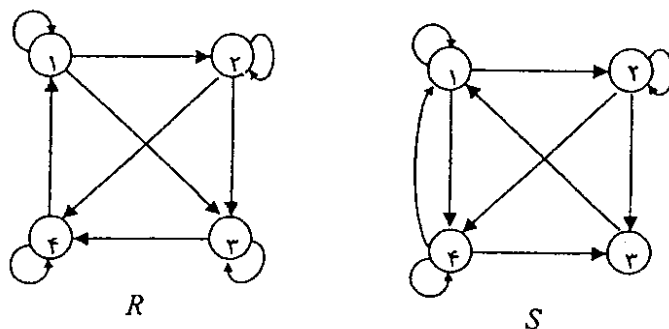
$$(p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3; q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3), k = 3$$

$$M_{R^\infty} = W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۴- فرض کنید که R و S روابطی باشند که به وسیله گرافهای سودار زیر تعریف شدهاند.

مطلوب است محاسبه

(الف) \bar{R} (ب) $\overline{R \cap S}$ (ج) $R \cap S$ (د) S^{-1}



پاسخ:

کلیه روابط را به وسیله ماتریس متناظرشان نشان می دهیم.

الف داریم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\bar{R}} = \bar{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\overline{R \cap S}} = \bar{M}_{R \cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{S^{-1}} = (M_S)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۵- برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ رابطه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آیا رابطه R متعدی است؟ چرا؟

پاسخ:

نه خیر. داریم $2R3$ و $2R4$ و $3R4$ درحالی‌که $2 \not R 4$

یک روش برای تست اینکه R متعدی است یا نه اینست که به‌ستار متعدی R ، یعنی

R^∞ را پیدا کنیم. اگر $R = R^\infty$ آنگاه R متعدی است در غیر این‌صورت R متعدی

نمی‌باشد. در تمرین فوق داریم:

$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روشن است $R \neq R^\infty$ ، پس R متعدی نمی‌باشد.

♦ در تمرینهای ۲۶ الی ۲۷، فرض کنید که $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و S و دو

رابطه از A به B هستند که به وسیله ماتریس‌های رابطه تعریف شده‌اند. حساب کنید:

(الف) \bar{S} (ب) $\overline{R \cap S}$ (ج) $R \cup S$ (د) R^{-1}

-۲۶

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-۲۷

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۲۶:

(الف)

$$M_{\bar{S}} = \overline{M_S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\overline{R \cap S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۲۷:

(الف)

$$M_{\bar{S}} = \overline{M_S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\overline{R \cap S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۸- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

و

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 6), (4, 4), (6, 4), (6, 6), (5, 5)\}$$

دو رابطه هم‌ارزی در A باشند. کلاس‌های هم‌ارزی $R \cap S$ را به دست آورید.

پاسخ:

داریم:

$$R \cap S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

لذا

$$[1] = [2] = \{1, 2\}$$

$$[3] = \{3\}, [4] = \{4\}, [5] = \{5\}, [6] = \{6\}$$

۲۹- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$$

و

$$S = \{(3, 1), (4, 4), (2, 3), (2, 4), (1, 1), (1, 4)\}$$

حساب کنید

SoS (د)

RoS (ج)

SoR (ب)

RoR (الف)

پاسخ:

داریم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف)

$$M_{RoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$RoR = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

(ب)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$SoR = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

(ج)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$RoS = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

(د)

$$M_{SoS} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$SoS = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4), (4,4)\}$$

۳۰- اگر R و S دو رابطه هم‌ارزی در A باشند، آیا SoR نیز یک رابطه هم‌ارزی در A است؟

چرا؟

پاسخ:

خیر، زیرا اگر فرض کنیم

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \text{ و } R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$$

در این صورت R و S روابط هم‌ارزی می‌باشد. درحالی‌که

$$SoR = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

SoR رابطه هم‌ارزی نمی‌باشد، زیرا SoR ۲ و SoR ۳ و SoR ۳ درحالی‌که SoR ۱

♦ در تمرین‌های ۳۱ الی ۳۲ فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، M_S و M_R ماتریسهای رابطه به ترتیب برای روابط S, R در A باشند. حساب کنید:

$$M_{S \circ S} \text{ (د)} \quad M_{R \circ S} \text{ (ج)} \quad M_{S \circ R} \text{ (ب)} \quad M_{R \circ R} \text{ (الف)}$$

-۳۱

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & 1 & . & . \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}, \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & 1 & . & . \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۱:

(الف)

$$M_{R \circ R} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{R \circ S} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{S \circ S} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۲:

(الف)

$$M_{R \circ R} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$M_{R \circ S} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)

$$M_{S \circ S} = M_S \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۳- نشان دهید که اگر R بازتابی و متعدی باشد در این صورت برای همه n های صحیح و مثبت داریم:

$$R^n = R$$

پاسخ:

حکم فوق را به استقرای قوی ثابت می کنیم.

۱. مبنای استقرا. بازای $n = 1$ واضح است که $R^1 = R$

۲. فرض استقرای قوی. فرض کنیم حکم برای هر i ، که $1 \leq i \leq k$ برقرار باشد. یعنی بازای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم.

$$R^i = R$$

۳. مرحله استقرا. برای $n = k + 1$ با توجه به فرض استقرای قوی داریم:

$$R^{k+1} = R^k \odot R = R \odot R = R^T$$

حال کافی است ثابت کنیم $R^T = R$.

فرض کنیم $(M_R)_{ij} = 1$. یعنی مسیری به طول ۲ از مولفه a_i به مولفه a_j در رابطه

R وجود دارد. بنابراین مولفه‌ای مانند a_i موجود است به طوریکه

$$a_i R a_i, \quad a_i R a_j$$

اما، R متعدی است. پس $a_i R a_j$ در نتیجه $(M_R)_{ij} = 1$

برعکس اگر $(M_R)_{ij} = 1$ آنگاه $a_i R a_j$ ، از اینکه R بازتابی است نیز داریم $a_i R a_i$.

بنابراین مسیری به طول ۲ به صورت زیر از a_i به a_j وجود دارد.

$$a_i R a_i, \quad a_i R a_j$$

بنابراین: $a_i R^T a_j$. یعنی $(M_{R^T})_{ij} = 1$. در نتیجه $R^T = R$ و اثبات تمام است.

۳۴- فرض کنید که R یک رابطه در A و $S = R^T$. نشان دهید که اگر $a, b \in A$ ، در این

صورت، $a S^\infty b$ ، اگر و تنها اگر، مسیری با تعداد یال‌های زوج در R از a به b موجود باشد.

پاسخ:

داریم:

$$S^\infty = S \cup S^T \cup S^T \cup \dots$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
 aS^{\circ}b &\Leftrightarrow \exists m : aS^m b \\
 &\Leftrightarrow \exists m : a(R^{\vee})^m b \\
 &\Leftrightarrow \exists m : aR^{\vee m} b
 \end{aligned}$$

یعنی مسیری با تعداد یالهای زوج در R از a به b وجود دارد اگر و تنها اگر $aS^{\circ}b$.

♦ در تمرین های ۳۵ الی ۳۷ فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4\}$. برای رابطه R تعریف شده، به وسیله ماتریس M_R ، بستر متعددی را با استفاده از الگوریتم وارشال محاسبه کنید.

-۳۵

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-۳۶

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-۳۷

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس های مراحل مختلف الگوریتم وارشال را با M_1 نمایش می دهیم.

پاسخ ۳۵:

با فرض $M_0 = W_1$ داریم:

$$(p_1 = 1, p_2 = 2; q_1 = 1, q_2 = 4) \quad , \quad k = 1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(p_1 = 2; q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 4) \quad , \quad k = 2$$

$$M_2 = M_1$$

$$: (p_1 = 3 ; q_1 = 2) \quad , \quad k = 2$$

$$M_r = M_r$$

$$: (p_1 = 1 , p_r = 2 , p_r = 4 ; q_1 = 4) \quad , \quad k = 4$$

$$M_r = M_r = \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۶: 

با فرض $M_r = W_r$ داریم:

$$: (p_1 = 1 , p_r = 2 ; q_1 = 1 , q_r = 2) \quad , \quad k = 1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix}$$

$$: (p_1 = 1 , p_r = 2 ; q_1 = 1 , q_r = 2) \quad , \quad k = 2$$

$$M_r = M_1$$

$$: (p_1 = 4 ; q) \text{ مقداری ندارد} \quad , \quad k = 3$$

$$M_r = M_r$$

$$: (p \text{ مقداری ندارد} ; q_1 = 3) \quad , \quad k = 4$$

$$M_r = M_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix}$$

پاسخ ۳۷: 

با فرض $M_r = W_r$ داریم:

$$: (p_1 = 1 , p_r = 4 ; q_1 = 1 , q_r = 4) \quad , \quad k = 1$$

$$M_1 = M_r$$

$$: (p_1 = 2 , p_r = 3 ; q_1 = 2 , q_r = 3) \quad , \quad k = 2$$

$$M_r = M_1$$

$$: (p_1 = 2 , p_r = 3 ; q_1 = 2 , q_r = 3) \quad , \quad k = 3$$

$$M_r = M_r$$

$$: (p_1 = 1, p_r = 4; q_1 = 1, q_r = 4) \quad , \quad k = 4$$

$$M_r = M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳۸- فرض کنید که R و S دو رابطه در $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشند که بوسیله $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\}$ و $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$ تعریف شده‌اند.

مطلوب است .

$$S^r \text{ (و)} \quad S^r \text{ (هـ)} \quad R^r \text{ (د)} \quad R^r \text{ (ج)} \quad RoS \text{ (ب)} \quad SoR \text{ (الف)}$$

پاسخ :

داریم :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف)

$$M_{SoR} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$SoR = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

(ب)

$$M_{RoS} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین .

$$RoS = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$$

(ج)

$$M_{R^r} = M_{RoR} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین .

$$R^r = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$$

(د)

$$M_{R^T} = M_{R^T \circ R} = M_{R^T} \odot M_R = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$R^T = \{(1,4), (2,4), (4,4)\}$$

(هـ)

$$M_{S^T} = M_{S^T \circ S} = M_{S^T} \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$S^T = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

(و)

$$M_{S^T} = M_{S^T \circ S} = M_{S^T} \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

بنابراین ،

$$S^T = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

۳۹- فرض کنید که $A = \{1,2,3,4\}$ و $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4)\}$ یک رابطه در A باشد. روابط S و T ($T \neq S$) در A را به گونه‌ای پیدا کنید که

$$SoR = ToR = \{(1,1), (1,2), (1,4)\}$$

پاسخ :

$$T = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,4)\} \quad \text{و} \quad S = \{(1,1), (1,4), (2,2)\}$$

۴۰- فرض کنید که $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ یک رابطه در A باشد. گراف سودار روابط زیر را رسم کنید:

R^1 (د)

R^2 (ج)

R^3 (ب)

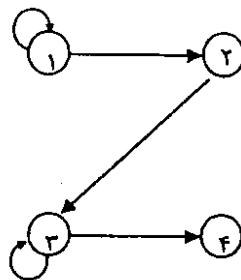
R (الف)

پاسخ:

(الف)

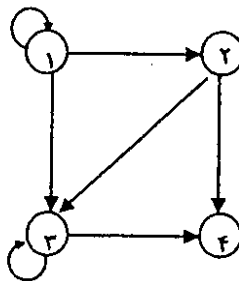
داریم:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

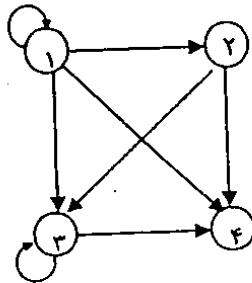


(ب)

$$M_{R^3} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

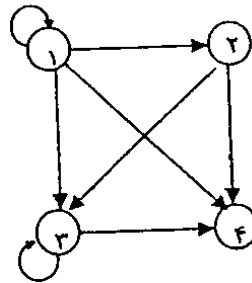


$$M_{R^T} = M_{R^T} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(د)

$$M_{R^T} = M_{R^T} \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



۴۱- فرض کنید که R یک رابطه بازتابی و متعدی در مجموعه A باشد. نشان دهید که رابطه S تعریف شده به وسیله: « xSy ، اگر و تنها اگر xRy ، xRy ، yRx » یک رابطه هم‌ارزی در A است.

پاسخ:

بازتابی: چون R بازتابی است پس بازای هر $x \in A$

$$xRx \text{ و } xRx \Rightarrow xSx$$

پس S بازتابی است.

تقارن: فرض کنیم xSy در اینصورت xRy و yRx به عبارتی xRy و yRx پس xSy ، یعنی S متقارن نیز است.

تعدی: فرض کنیم xSy و ySz در اینصورت:

$$\begin{cases} yRx \text{ و } xRy \\ zRy \text{ و } yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xRy \text{ و } yRz \\ zRy \text{ و } yRx \end{cases}$$

از اینکه R متعدی است از دستگاه اخیر بدست می آوریم:

$$xRz \text{ و } zRx$$

پس xSz ، لذا S متعدی نیز می باشد. پس S یک رابطه هم ارزی است.

۴۲- فرض کنید که R یک رابطه تعریف شده در مجموعه اعداد صحیح و مثبت باشد، به

گونه ای که $(a, b) \in R$ اگر a/b به صورت 2^m بیان شود (m یک عدد صحیح دلخواه است).

(الف) نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است.

(ب) کلاس های هم ارزی R را به دست آورید.

پاسخ:

(الف) بازتابی: بازای هر $a \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$\frac{a}{a} = 1 = 2^0 \Rightarrow aRa$$

تقارن: اگر aRb ، آنگاه عدد صحیحی مانند m وجود دارد به طوریکه

$$\frac{a}{b} = 2^m \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^{-m} \Rightarrow bRa$$

تعدی: اگر aRb و bRc آنگاه اعداد صحیح m, n وجود دارند به طوریکه

$$\frac{a}{b} = 2^m, \frac{b}{c} = 2^n \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b}{c} = \frac{2^m \cdot b}{2^n \cdot c} = \frac{2^m}{2^{-n}} = 2^{m+n} \Rightarrow aRc$$

پس R یک رابطه هم ارزی می باشد.

(ب)

$$[1] = \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$[2] = \{2, 6, 12, \dots\} = \{2 \times 2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$[5] = \{5, 10, 20, \dots\} = \{5 \times 2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

\vdots

بالاخره، بازای هر عدد اول P ، کلاس هم ارزی $[P]$ ، به صورت زیر است:

$$[P] = \{P \times 2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

۴۳- فرض کنید که R یک رابطه متقارن و متعدی در مجموعه A باشد. نشان دهید که اگر برای هر $a \in A$ ، عنصری مثل $b \in A$ موجود باشد به گونه‌ای که $(a, b) \in R$ در این صورت، R یک رابطه هم‌ارزی است. نشان دهید که اگر به جای خاصیت متقارن، خاصیت بازتابی را جایگزین کنیم، نتیجه نادرست خواهد شد.

پاسخ:

کافی است نشان دهیم R با خاصیت داده شده بازتابی نیز می‌باشد. برای هر $a \in A$ بنا به فرض عنصری مانند $b \in A$ موجود است که $a R b$ چون R متقارن است پس $b R a$ و از اینکه R متعدی است: $a R a$. پس R یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد. ثابت می‌کنیم اگر به جای خاصیت متقارن، خاصیت بازتابی را جایگزین کنیم، نتیجه نادرست خواهد بود. فرض کنیم A مجموعه اعداد طبیعی و R به صورت زیر تعریف شده است.

$$a R b \Leftrightarrow a | b \quad (b, a \text{ را عاد میکند})$$

در این صورت R بازتابی و متعدی است و برای هر $a \in A$ ، عنصری مثل $b \in A$ (مثلاً $b=2a$) موجود است که $a | b$ ، پس $a R b$. در حالیکه R متقارن نیست. زیرا مثلاً $4 R 2$ ولی $2 \not R 4$. پس R یک رابطه هم‌ارزی نیست.

۴۴- فرض کنید که R یک رابطه بازتابی در A باشد. نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی در A است، اگر و تنها اگر، $(a, b) \in R$ و $(a, c) \in R$ نتیجه $(b, c) \in R$ به دست آید.

پاسخ:

ثابت می‌کنیم با فرض داده شده R علاوه بر بازتابی بودن، متقارن و متعدی نیز می‌باشد.

تقارن: اگر $(a, b) \in R$ از اینکه R بازتابی است داریم $(a, a) \in R$ ، پس $(a, b) \in R$ و $(a, a) \in R$ لذا $(b, a) \in R$.

تعدی: اگر $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R$ از اینکه R متقارن است بدست می‌آوریم $(b, a) \in R$. پس $(b, a) \in R$ و $(b, c) \in R$ بنابراین $(a, c) \in R$ بر عکس اگر R یک رابطه هم‌ارزی باشد آنگاه

$$(a, b) \in R \text{ و } (a, c) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \text{ و } (b, c) \in R$$

و اثبات تمام است.

۴۵- نشان دهید که روابط زیر که در $R \times R$ تعریف شده‌اند، (R مجموعه اعداد حقیقی است) روابط هم‌ارزی هستند. تعبیر هندسی کلاس‌های هم‌ارزی این روابط چیست؟

(الف) $(a, b)R(c, d)$ اگر و تنها اگر $a^r + b^r = c^r + d^r$.

(ب) $(a, b)S(c, d)$ اگر و تنها اگر $ab = cd$.

(ج) $(a, b)T(c, d)$ اگر و تنها اگر $a + b = c + d$.

پاسخ:

الف داریم:

بازتابی:

$$(a, b) \in R \times R \Rightarrow a^r + b^r = a^r + b^r \Rightarrow (a, b)R(a, b)$$

تقارن:

$$\begin{aligned} (a, b)R(c, d) &\Rightarrow a^r + b^r = c^r + d^r \\ &\Rightarrow c^r + d^r = a^r + b^r \\ &\Rightarrow (c, d)R(a, b) \end{aligned}$$

تعدی:

$$\begin{aligned} (a, b)R(c, d) &\Rightarrow a^r + b^r = c^r + d^r \\ (c, d)R(e, f) &\Rightarrow c^r + d^r = e^r + f^r \Rightarrow a^r + b^r = e^r + f^r \Rightarrow (a, b)R(e, f) \end{aligned}$$

پس R یک رابطه هم‌ارزی است.

برای ارائه شهودی از کلاس‌های هم‌ارزی R ، بازای یک زوج دلخواه مانند (a, b) ، فرض کنید $a^r + b^r = r^r$ ، در این صورت $(a, b)R(c, d)$ اگر و تنها اگر

$$a^r + b^r = c^r + d^r \Leftrightarrow c^r + d^r = r^r$$

یعنی، (c, d) در کلاس هم‌ارزی $[(a, b)]$ قرار دارد اگر و تنها اگر (c, d) روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r قرار داشته باشد. بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی r ، دایره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات می‌باشند.

ب) داریم:

بازتابی:

$$(a, b) \in R \times R \Rightarrow ab = ab \Rightarrow (a, b)S(a, b)$$

تقارن:

$$(a, b)S(c, d) \Rightarrow ab = cd \Rightarrow cd = ab \Rightarrow (c, d)S(a, b)$$

تعدی:

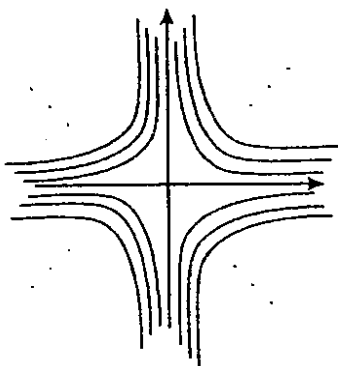
$$\begin{aligned} (a, b)S(c, d) &\Rightarrow ab = cd \\ (c, d)S(e, f) &\Rightarrow cd = ef \Rightarrow ab = ef \Rightarrow (a, b)S(e, f) \end{aligned}$$

بنابراین S یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی S ، زوج دلخواه (a, b) را در نظر بگیرید و قرار دهید $ab = r$ ، در این صورت $(a, b) S (c, d)$ اگر و تنها اگر

$$ab = cd \Leftrightarrow cd = r$$

بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی S منحنی‌هایی به صورت زیر می‌باشند.



(ج)

بازتابی:

$$(a, b) \in R \times R \Rightarrow a + b = a + b \Rightarrow (a, b) T (a, b)$$

تقارن:

$$(a, b) T (c, d) \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow c + d = a + b \Rightarrow (c, d) T (a, b)$$

تعدی:

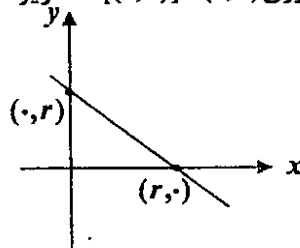
$$(a, b) T (c, d) \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow a + b = e + f \Rightarrow (a, b) T (e, f)$$

$$(c, d) T (e, f) \Rightarrow c + d = e + f \Rightarrow a + b = e + f \Rightarrow (a, b) T (e, f)$$

برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی T ، زوج دلخواه (a, b) را در نظر بگیرید و قرار دهید $a + b = r$ ، در این صورت $(a, b) T (x, y)$ اگر و تنها اگر

$$a + b = x + y \Leftrightarrow x + y = r$$

بنابراین کلاس هم‌ارزی (a, b) ، $[(a, b)]$ خط زیر می‌باشد.



بنابراین، کلاس‌های هم‌ارزی T خطوط راست می‌باشند.

۴۶- فرض کنید که R رابطه‌ای در مجموعه Z (اعداد صحیح) باشد که به صورت زیر تعریف شده است: $(a, b) \in R$ ، اگر و تنها اگر $a^r - b^r$ مضربی از عدد ۲ باشد. کلاس‌های هم‌ارزی R را به دست آورید.

پاسخ:

برای $a \in Z$ (دلخواه اما ثابت) کلاس هم‌ارزی a را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} b \in [a] &\Rightarrow a^r - b^r = 2k, \quad k \in Z \\ &\Rightarrow b^r = a^r - 2k, \quad k \in Z \end{aligned}$$

پس

$$[a] = \{b \in Z \mid b^r = a^r - 2k, \quad k \in Z\}$$

مثلاً برای $a = 2$ کلاس هم‌ارزی a ، $[a]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$[2] = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

و برای $a = 1$ ، کلاس هم‌ارزی a ، $[a]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$[1] = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$$

از اینکه $[1] \cup [2] = Z$ ، پس R دو کلاس هم‌ارزی دارد که عبارتند از $[1]$ ، $[2]$.

۴۷- فرض کنید که $A = R \times R$ و $P(x, y)$ یک نقطه مفروض در A باشد. برای $a, b \in A$ ، رابطه R در A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

aRb ، اگر و تنها اگر، فواصل b, a از نقطه P یکی باشد.

نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی در A است. کلاس‌های هم‌ارزی R دارای چه تعبیر هندسی هستند؟

پاسخ:

نشان دادن هم‌ارزی بودن R ساده است. برای بدست آوردن کلاس‌های هم‌ارزی R ، نقطه دلخواه (x_1, x_2) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم فاصله (x_1, x_2) از P ، برابر r باشد. برای هر نقطه از A مانند (x, y) ، (x, y) در کلاس هم‌ارزی (x_1, x_2) است اگر و تنها اگر فاصله (x, y) از P برابر r باشد. بنابراین کلاس هم‌ارزی (x_1, x_2) مکان هندسی نقاطی است که فاصله‌شان از P برابر r باشد. اما می‌دانیم این عبارت تعریف دایره به مرکز P و شعاع r است. بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی R ، دایره‌هایی به مرکز P هستند.

۴۸- در یک جزیره دور افتاده، سه ملوان کشتی شکسته، برای تهیه خوراک، مقداری نارگیل تهیه می‌کنند. آنها تصمیم می‌گیرند تا شب استراحت کرده و صبح، نارگیل‌ها را بین خود تقسیم کنند. نیمه‌های شب یکی از این سه ملوان از خواب بیدار شده و از روی بدگمانی،

تصمیم می‌گیرد که نارگیل‌ها را قسمت کند. او سعی می‌کند که آنها را به سه قسمت مساوی تقسیم کند ولی متوجه می‌شود که یک نارگیل اضافه می‌ماند. بدون در نظر گرفتن نارگیل اضافی، سهم خود را در جایی مخفی می‌کند و مجدداً به خواب می‌رود. اندکی، بعد یکی دیگر از ملوانان از خواب بیدار شده و وی نیز در هنگام تقسیم نارگیل‌های باقیمانده به سه قسمت مساوی، متوجه می‌شود که یکی از آنها اضافه می‌ماند. وی بدون در نظر گرفتن نارگیل اضافه، سهم خود را در گوشه‌ای پنهان کرده و مجدداً می‌خوابد. بالاخره، ملوان سوم، این فرآیند را تکرار و او نیز متوجه می‌شود که با کنار گذاشتن یکی از نارگیل‌های باقیمانده می‌تواند آنها را به سه سهم مساوی تقسیم کند. حال شما بگویید که کمترین تعداد نارگیل‌های اولیه چند تا بوده است؟

👉 پاسخ:

فرض کنیم x تعداد کل نارگیل باشد. نفر اول نارگیل اضافی را کنار گذاشته مابقی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده سهم خود را برمی‌دارد. بنابراین نفر اول $\frac{x-1}{3}$ از نارگیل‌ها را برمی‌دارد. بنابراین تعداد نارگیل‌های باقیمانده برابر است با:

$$x - \frac{x-1}{3} = \frac{2x+1}{3}$$

نفر دوم نیز از میان $\frac{2x+1}{3}$ نارگیل باقیمانده یک نارگیل را کنار گذاشته بقیه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده سهم خود را برمی‌دارد. بنابراین نفر دوم

نیز $\frac{\frac{2x+1}{3} - 1}{3}$ تا از نارگیل‌ها را برمی‌دارد. پس در نهایت تعداد نارگیل‌های باقیمانده برابر خواهد بود با:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{\frac{2x+1}{3} - 1}{3} = \frac{4x+5}{9}$$

حال نفر سوم از خواب بیدار شده مانند قبل نارگیل‌ها را تقسیم می‌کند. تعداد نارگیلی که نفر سوم برمی‌دارد برابر است با:

$$\frac{\frac{4x+5}{9} - 1}{3} = \frac{4x-4}{27}$$

حال، کمترین مقدار x زمانی به دست می‌آید که کمترین تعداد ممکن نارگیل به نفر سوم برسد.

به عبارتی، کمترین مقدار x زمانی به دست می‌آید که عبارت $\frac{4x-4}{27}$ یک عدد طبیعی باشد.

$$\frac{4x-4}{27} = 1 \Rightarrow x = \frac{31}{4} = 7/75$$

$$\frac{4x-4}{27} = 2 \Rightarrow x = \frac{58}{4} = 14/5$$

$$\frac{4x-4}{27} = 3 \Rightarrow x = \frac{85}{4} = 21/25$$

$$\frac{4x-4}{27} = 4 \Rightarrow x = \frac{112}{4} = 28$$

بنابراین کمترین عدد قابل قبول، $x = 28$ می‌باشد.

۴۹- تمرین ۴۸ را با ۴ ملوان حل کنید.

پاسخ:

برای نشان دادن راه حل‌های دیگر مساله، این بار مساله را با یک روش دیگر حل می‌کنیم.

با توجه به فرضهای مساله در هر مرحله داریم:

$$4K_i + 1 = \text{تعداد نارگیل در مرحله } i \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad K_i > 0$$

همچنین، با توجه به اینکه نفر اول، در مرحله اول K_1 تا از نارگیل‌ها را برمی‌دارد.

بنابراین، تعداد نارگیل باقیمانده برای مرحله دوم برابر است با $3K_1 + 1$ بنابراین

$$2K_1 + 1 = 4K_2 + 1$$

به همین ترتیب روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2K_1 + 1 = 4K_2 + 1 \\ 2K_2 + 1 = 4K_3 + 1 \\ 2K_3 + 1 = 4K_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{4}{3}K_2 \\ K_2 = \frac{4}{3}K_3 \\ K_3 = \frac{4}{3}K_4 \end{cases}$$

با جایگذاری K_4 از رابطه آخر در رابطه دوم خواهیم داشت:

$$K_2 = \frac{16}{9}K_4$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه اول نیز بدست می آوریم:

$$K_1 = \frac{64}{27} K_r$$

کمترین مقدار ممکن برای K_r به طوریکه K_1 یک عدد طبیعی باشد برابر است با $K_r = 27$ که در این صورت از رابطه بدست آمده خواهیم داشت:

$$K_1 = 64, \quad K_r = 48, \quad K_r = 36, \quad K_r = 27$$

که در این صورت تعداد کل نارگیل ها برابر خواهند بود با:

$$x = 4K_1 + 1 = 257$$

۵۰- تمرین ۴۸ را با ۵ ملوان حل کنید.

پاسخ:

با روشی مانند تمرین ۴۹ بدست می آوریم:

$$\text{تعداد کل نارگیل ها} = 5K_1 + 1 = 5 \times 625 + 1 = 3126$$

تذکر: به استقرا می توان ثابت کرد مساله داده شده با n ملوان دارای جواب زیر است:

$$\text{تعداد حداقل نارگیل ها} = n^n + 1$$