مقدمه

جزوه حاضر به منظور دوره کلی و مرور جامع مطالب اصلی درس ریاضی مهندسی آماده شده است.

از آنجاکه هدف این مجموعه ایجاد توانایی برای پاسخگویی به بیش از ۸۰٪ سوالات مطرح شده در آزمون این درس می‌باشد، پیشنهاد می‌شود:

در درس ریاضی مهندسی به مباحث زیر کاملاًمسلط باشید.

1. **در بحث آنالیز فوریه (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ در سری‌های فوریه

A) محاسبه ضرایب سری فوریه با توجه به نوع سری فوریه خواسته شده (سری فوریه معمولی ـ سینوسی ـ کسینوسی)

B) سری فوریه توابع بیان شده در فرم توان و یا ضرب سینوس‌ها و کسینوس‌ها

C) مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های فوریه برای یافتن سری‌های فوریه جدید

D) استفاده از قضیه دیریکله و تساوی پارسوال برای محاسبه حاصل سری‌های نامتناهی

ب ـ در انتگرال‌های فوریه

A) محاسبه ضرایب انتگرال‌های فوریه

B) حل معادلات انتگرالی

C) استفاده از قضیه دیریکله و تساوی پارسوال برای محاسبه حاصل انتگرال‌های ناسره

ج ـ در تبدیلات فوریه

A) محاسبه تبدیلات فوریه سینوسی ـ کسینوسی ـ معمولی با استفاده از تعریف

B) حفظ بودن تبدیل فوریه توابع معروف

C) قضایای مربوط به محاسبه تبدیل فوریه توابع

$f'(t), tf(t), e^{i\alpha t}f(t), f(t-\alpha), F(F(t))$

وقتی تبدیل فوریه $f(t)$ به صورت $F(\omega)$ معلوم است.

2. **در بحث مقدمات توابع مختلط**

الف ـ محاسبه ریشه‌های n ام و لگاریتم اعداد مختلط

ب ـ تعیین اشکالی که با معادله $|z-z_1|\pm|z-z_2|=R$ داده شده‌اند

ج ـ با فرض $w=f(z)$ تعیین $\operatorname{Re} w$ و $\operatorname{Im} w$ و $|w|$ برحسب x و y یا r و θ

3. **در بحث مشتق توابع مختلط (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ قضایای اول و دوم کوشی ریمان

ب ـ استفاده از معادلات کوشی ریمان برای یافتن مزدوج همساز

۴. **در بحث نگاشت (به طور متوسط ۱۵٪ از کل سوالات)**

عملکردهای توابع مختلط معروف

$$\frac{1}{z}\ ,\ z^n\ ,\ az+b\ ,\ \sin z\ ,\ \cos z\ ,\ z+\frac{1}{z}\ ,e^z\ ,\ \ln z\ ,\ \frac{az+b}{cz+d}$$

روی منحنی‌ها و یا نواحی خاص و استفاده از آن‌ها در بحث ترکیب نگاشت‌ها

۵. **در بحث انتگرال‌های مختلط (به طور متوسط ۳۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ محاسبه انتگرال‌های مختلط به روش مستقیم

ب- تعیین ناحیه همگرایی سری‌های مختلط با روش ریشه n ام

ج ـ دسته‌بندی انواع نقاط تکین و تعیین نوع آن‌ها

د ـ بسط‌های مک‌لوران توابع معروف و استفاده از آن‌ها برای یافتن بسط‌های لوران

هـ ـ نوشتن بسط توابع کسری معتبر در نواحی مختلف با عنایت به سری‌های هندسی

و - محاسبه مانده در نقاط تکین تنها با روش‌های

A) استفاده از بسط لوران

B) استفاده از فرمول محاسبه مانده در قطب‌ها

ز ـ محاسبه انتگرال‌های مختلط با روش مانده‌ها و محاسبه انتگرال‌های حقیقی در فرمهای

$$\int_0^{2\pi} f\left(\sin\theta,\cos\theta\right)d\theta \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,e^{i\alpha x}\,dx$$

۶. **در بحث معادلات با مشتقات جزئی (به طور متوسط ۲۵٪ از کل سوالات)**

الف ـ بازنویسی یک معادله دیفرانسیلی با تغییر در متغیر یا تغییر در تابع

ب- مساله حذف تابع اختیاری و معکوس آن یعنی روش لاگرانژ در حل معادلات مرتبه اول شبه خطی

ج ـ تعیین نوع معادلات مرتبه دوم شبه خطی با تأکید بر علامت Δ و تغییر متغیرهای لازم برای فرم استاندارد

د ـ معادلات مرتبه دو با ضرایب ثابت با تأکید بر تجزیه به عوامل $aD+bD'+c$

هـ ـ همگن کردن معادله و شرایط مرزی آن

و ـ یافتن جواب حالت ماندگار

ز ـ رد گزینه کردن با تأکید بر ارضاء شرایط مرزی ـ صدق کردن در معادله ـ کراندار ماندن جواب

ح ـ ایده کلی روش جداسازی متغیرها

ط ـ اعمال شرایط مرزی در جواب‌های کلی موجود برای یافتن ضرایب (با استفاده از بحث سری‌ها و انتگرال‌های فوریه)

ی- حل دالامبر معادله موج

ک- استفاده از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه در حل معادلات با مشتقات جزئی

ارادتمند شما

محمدصادق معتقدی

سری‌های فوریه

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $P = 2L$ باشد، تحت شرایطی این امکان وجود دارد تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی که به سری فوریه تابع موسوم است و به فرم زیر نوشته می‌شود، بیان کرد.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

ضرایب جملات کسینوسی : $a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$

ضرایب جملات سینوسی : $b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$

ثابت سری فوریه : $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \, dx$

توجه ۱ : $\dfrac{a_0}{2}$ را ثابت سری فوریه تابع می‌گویند و مبین مقدار متوسط $f(x)$ در یک دوره تناوب است و در حقیقت داریم:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{سطح خالص زیر نمودار تابع } f \text{ در یک پریود}}{\text{طول بازه یک پریود}}$$

منظور از سطح خالص آن است که مساحت‌های بالای محور xها مثبت و مساحت‌های پایین محور xها منفی به احتساب می‌آید.

توجه ۲ : اگر f تابعی زوج باشد، یعنی نمودار آن نسبت به محور yها متقارن باشد، داریم:

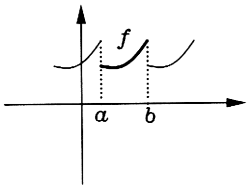
$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

اگر f تابعی فرد باشد، یعنی نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، داریم:

$$a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

توجه ۳ : گاهی تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,b)$ تعریف می‌شود و می‌گویند برای آن سری فوریه بنویسید. در این شرایط این طور فرض می‌شود که f را در فاصله $(a\,,b)$ در نظر می‌گیریم و در بیرون آن فاصله همان شکل را با دوره تناوب $P = b - a$ گسترش داده و برای تابع متناوب ساخته شده می‌خواهیم سری فوریه بنویسیم.

می‌توان نشان داد در این حالت $L = \dfrac{b-a}{2}$ بوده و داریم:

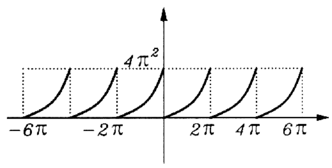


$$a_n = \frac{1}{L} \int_{a}^{b} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{a}^{b} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

مثال : تابع $f(x)=x^2$ و $0<x<2\pi$ مفروض است. ضرایب جملات سینوسی را برای سری فوریه این تابع تعیین کنید.

حل:



به وضوح دیده می‌شود برخلاف ضابطه x^2 که تابعی زوج را تداعی می‌کند چون x^2 در فاصله $(0,2\pi)$ مد نظر است و در بیرون آن با دوره تناوب $P=2\pi$ گسترش می‌یابد، تابعی نه زوج و نه فرد مطابق شکل مدنظر است که می‌خواهیم b_nهایش را بیابیم. داریم:

$$2L=2\pi \quad \to \quad L=\pi$$

انتگرال	مشتق
$\sin nx$	x^2
$-\frac{1}{n}\cos nx$	$2x$
$-\frac{1}{n^2}\sin nx$	2
$\frac{1}{n^3}\cos nx$	0

(علامت‌ها: $+$ ، $-$ ، $+$)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]=-\frac{4\pi}{n}$$

توجه ۴ : مطابق قضیه دیریکله داریم:

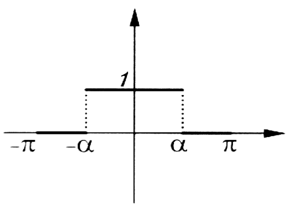
$$\frac{f\left(x_0^-\right)+f\left(x_0^+\right)}{2}= \text{(حاصل سری فوریه تابع } f \text{ در نقطه } x_0)$$

و طبیعتاً اگر f در نقطه x_0 پیوسته باشد، داریم:

$$f\left(x_0\right)= \text{(حاصل سری فوریه تابع } f \text{ در نقطه } x_0)$$

و از این قضیه می‌توان برای محاسبه حاصل مقدار همگرائی سری‌های عددی بهره برد.

مثال : باتوجه به سری فوریه تابع نشان داده شده در شکل مقابل، حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ را به‌دست آورید.



حل:

$$P=2\pi \quad \to \quad L=\pi$$

تابع زوج است. پس:

$$b_n=0$$

و البته داریم:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\alpha} 1\times\cos nx\,dx + \int_{\alpha}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}(1)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}(0)dx = \frac{2\alpha}{\pi} \quad\to\quad \frac{a_0}{2} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos nx$$

$x = 0$ نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ است، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos 0 \quad\to\quad 1 = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n} \quad\to\quad I = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

مثال : تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ ، $0 < x < 1$ مفروض است. حاصل سری فوریه این تابع در نقطه $x = 0$ کدام است؟

حل: طبق قضیه دیریکله داریم:

$$(\text{مقدار سری فوریه تابع در نقطه } x = 0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}$$

باید تابع تعریف شده در بازه $(0, 1)$ ، با دوره تناوب $P = 1$ گسترش داده شود، لذا مقدار تابع در نقطه 0^- با $1+0^-$ برابر است.

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{f(1+0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{(1 - 3 + 4 + 1) + 1}{2} = 2$$

مثال : تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π بر بازه $(0,2\pi)$ دارای سری فوریه‌ای به صورت $1+\cos x+\frac{\cos 2x}{2!}+\frac{\cos 3x}{3!}+\cdots$ می‌باشد، $f(x)$ برابر است با:

۱) $e^{\sin x}\sin[\cos x]$ ۲) $e^{\sin x}\cos[\sin x]$ ۳) $e^{\cos x}\cos[\sin x]$ ۴) $e^{\cos x}\sin[\cos x]$

حل : با فرض $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$e^z = e^{e^{i\theta}} = e^{(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right)$$

اما می‌دانیم:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = 1 + e^{i\theta} + \frac{e^{2i\theta}}{2!} + \frac{e^{3i\theta}}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + (\cos\theta + i\sin\theta) + \left(\frac{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{2!}\right) + \left(\frac{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}{3!}\right) + \cdots$$

با مساوی قرار دادن قسمت حقیقی دو طرف به دست می‌آید:

$$1 + \cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \cdots = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$$

یعنی گزینه ۳ درست است.

راه دیگر: حاصل سری داده‌شده در مسئله به ازای $x = 0$، برابر با $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ و معرف e است و تنها گزینه‌ای که حایز این شرط است، گزینه ۳ است.

توجه ۵ : از آنجا که سری فوریه یک تابع بیان تابع به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف است (طوری که نه در هم ضرب شوند و نه به توانی برسند)، لذا در توابعی که خود از جنس cos و sin می‌باشند، می‌توان با عملیات جبری ساده، سری فوریه تابع را به سادگی به‌دست آورد.

یادآوری:

روابط تبدیل ضرب به جمع:

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\} \end{cases}$$

مثال : سری فوریه تابع $f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2 \quad ; \quad P = 2\pi$ را بنویسید.

حل: داریم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 2x + 2\sin x\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + 2\times\frac{1}{2}\{\sin 3x + \sin(x-2x)\}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x + \sin 3x - \sin x$$

توضیح اضافه: در سری فوریه داریم:

$$\begin{cases} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \\ b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a_n \cos nx \\ b_n \sin nx \end{matrix}$$

پس:

$$\frac{a_0}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad a_0 = 2 \quad , \quad a_2 = -\frac{1}{2} \quad , \quad a_4 = \frac{1}{2} \quad , \quad b_1 = -1 \quad , \quad b_3 = 3$$

بقیه a_nها، b_nها $= 0$

توجه ۶ : گاهی اوقات $f(x)$ در بازه $(0, h)$ تعریف می‌شود و می‌گویند برای آن سری فوریه بنویسید در این شرایط مانند توجه۳ تابعی متناوب با دوره تناوب $P = 2L = h$ تشکیل داده و برایش سری فوریه می‌نویسیم.

اما اگر قرار باشد برای این تابع سری فوریه کسینوسی بنویسیم در حقیقت باید تابع را برای بازه $(-h, 0)$ به فرم زوج گسترش داده و سپس تابع زوج حاصله را با دوره تناوب $P = 2h$ توسیع و برای آن سری فوریه می‌نویسیم، طبیعتاً:

$$a_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\cos\frac{n\pi}{h}x\,dx \qquad , \qquad b_n = 0$$

و اگر قرار باشد برای این تابع سری فوریه سینوسی بنویسیم، باید تابع را برای بازه $(-h, 0)$ به فرم فرد گسترش داده و سپس تابع فرد حاصله را با دوره تناوب $P = 2h$ توسیع و برای آن سری فوریه بنویسیم، طبیعتاً:

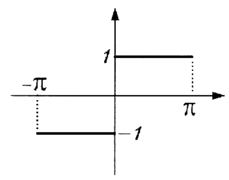
$$b_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin\frac{n\pi}{h}x\,dx \qquad , \qquad a_n = 0$$

مثال : با توجه به سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=1 \;;\; 0<x<\pi$ حاصل سری زیر را بیابید.

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}$$

حل: مطابق توجه ۸ قرار است برای تابع زیر سری فوریه بنویسیم. (تابعی که در بازه $(0,\pi)$ دارای مقدار 1 بوده و در بازه $(-\pi,0)$ دارای مقدار -1 می‌باشد و ساختاری فرد دارد)

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\times\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx=\frac{-2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}\Big(\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}-1\Big)$$



$$=\begin{cases}0 & ; \quad \text{زوج } n\\ \dfrac{4}{n\pi} & ; \quad \text{فرد } n\end{cases}$$

پس سری فوریه سینوسی تابع چنین است:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4}{(2n-1)\pi}}_{b_n}\sin\frac{(2n-1)\pi}{\pi}x$$

در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ **داریم**: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)}\overbrace{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{-(-1)^n}\quad\to\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}$

توجه ۷ : اگر $f(x)$ در بازه $(-L,L)$ دارای سری فوریه زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\qquad *$$

الف) چنانچه $f(-L)=f(L)$ باشد، مجازیم از رابطه * مشتق گرفته و سری فوریه $f'(x)$ را در بازه $(-L,L)$ به صورت زیر بنویسیم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ب) مجازیم از رابطه * انتگرال گرفته و در فاصله $(-L,L)$ به‌دست آوریم:

$$\int f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)+k$$

رابطه فوق اگر شامل $\frac{a_0}{2}x$ باشد، نمی‌تواند سری فوریه $\int f(x)\,dx$ را در بازه $(-L,L)$ توصیف کند. ولی بدیهی است:

۱) از طریق این رابطه، سری فوریه $\int f(x)\,dx-\frac{a_0}{2}x$ در بازه $(-L,L)$ قابل تعیین است. البته لازم است k را از طریق ثابت سری فوریه تابع $\int f(x)\,dx-\frac{a_0}{2}x$ در بازه $(-L,L)$ تعیین کنیم.

۲) اگر سری فوریه تابع x را در بازه $(-L, L)$ نوشته و آن را در رابطه فوق قرار دهیم، سری فوریه $\int f(x)\,dx$ در بازه مذکور پیدا می‌شود، البته k ثابت سری فوریه $\int f(x)\,dx - \frac{a_0}{2}x$ در این فاصله خواهد بود.

مثال: تابع $-\pi < x < \pi \;;\; f(x) = |x|$ دارای سری فوریه‌ای به فرم $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$ است.

مطلوبست محاسبه $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$؟

حل: فرض مسئله می‌گوید:

$$|x| = \begin{cases} -x \;; & -\pi < x < 0 \\ x \;; & 0 < x < \pi \end{cases} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

از طرفین این فرض انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2} \;; & -\pi < x < 0 \\ \frac{x^2}{2} \;; & 0 < x < \pi \end{cases} = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} + k$$

در $x = 0$ تساوی فوق نتیجه می‌دهد: $k = 0$ و در $x = \frac{\pi}{2}$ طبق قضیه دیریکله داریم:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(-1)^n}}{(2n+1)^3} \;\rightarrow\; \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} I \;\rightarrow\; I = \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}\right)\frac{\pi}{4}$$

توجه:مطابق تساوی پارسوال درسری های فوریه داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

مثال: تابع $-\pi < x < \pi \;;\; f(x) = x^2$ مفروض است. چنانچه سری فوریه این تابع به صورت $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ باشد، مطلوبست محاسبه $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$؟

حل: مطابق تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \;\rightarrow\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\right)^2 dx = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 + (0)^2\right)$$

$$\rightarrow\; \frac{2}{\pi}\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{2n}}{n^4} \;\rightarrow\; \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = 16\,I \;\rightarrow\; I = \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

مثال : فرض کنید $f(x)=x\ ,\ -L<x<L$ و سری فوریه تابع f به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

در این صورت مقدار سری زیر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^3}{20}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{2\pi^2}{3}$

حل: با انتگرال‌گیری از طرفین فرض مسئله به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x+k=\frac{2L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x+k$$

که در آن k ثابت سری فوریه تابع $\frac{x^2}{2}$ در بازه $(-L\ ,\ L)$ است و چنین به دست می‌آید:

$$k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{4L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-L}^{L}=\frac{L^2}{6}$$

لذا داریم:

$$x^2=\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{L^2}{3}$$

در $x=L$ طبق قضیه دیریکله نتیجه می‌شود:

$$L^2=\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi+\frac{L^2}{3}$$

و چون $\cos n\pi=(-1)^n$ لذا $(-1)^n\cos n\pi=1$ و خواهیم داشت:

$$L^2=\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{L^2}{3}\ \rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4L^2}\cdot\left(L^2-\frac{L^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

راه دیگر: طبق تساوی پارسوال می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\ \rightarrow\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}x^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2L}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L}^{L}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{\pi^2n^2}\ \rightarrow\ \frac{2L^2}{3}=\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

انتگرال‌های فوریه

اگر f تابعی غیرمتناوب باشد، امکان نوشتن سری فوریه برای آن موجود نیست. ولی چنانچه $f(x)$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ موجود باشد، این امکان وجود دارد f را به صورت انتگرالی از جملات سینوسی و کسینوسی که به انتگرال فوریه تابع موسوم است، به فرم زیر بیان نمود.

$$f(x) = \int \left(A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \right) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

توجه ۱ :

اگر f تابعی زوج باشد داریم:

$$B(\omega) = 0 \qquad , \qquad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

اگر f تابعی فرد باشد داریم:

$$A(\omega) = 0 \qquad , \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

توجه ۲ : مطابق قضیه دیریکله داریم:

$$\frac{f\left(x_0^-\right) + f\left(x_0^+\right)}{2} = \text{(مقدار انتگرال فوریه در نقطه } x_0 \text{)}$$

و از این موضوع می‌توان برای محاسبه حاصل انتگرال‌های ناسره استفاده کرد.

توجه ۳ :

مطابق تساوی پارسوال در انتگرالهای فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{0}^{\infty} \left(A^2(\omega) + B^2(\omega) \right) d\omega$$

مثال : ضرایب انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-4x} & x > 0 \end{cases}$ را پیدا کنید.

حل :

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-4x} \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ L(\cos \omega x) \right\} \Big|_{s=4} = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=4}$$

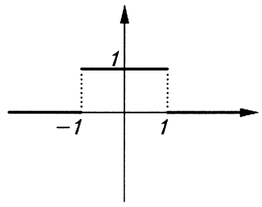
$$= \frac{1}{\pi} \frac{4}{16 + \omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{L(\sin\omega x)\right\}\Big|_{s=4}=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=4}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{16+\omega^2}$$

مثال : باتوجه به انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ;|x|<1\\ 0 & ;|x|>1\end{cases}$ که به صورت $f(x)=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x\,d\omega$ است. مطلوبست محاسبه انتگرال‌های $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x}\,dx$ و $J=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

حل : در $x=0$ مطابق قضیه دیریکله داریم:



$$\underbrace{\cancel{f(0)}}_{1}=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\underbrace{\cancel{\cos\omega 0}}_{1}\,d\omega \;\rightarrow\; \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega=\frac{\pi}{2} \quad *$$

با تغییر متغیر $\omega=x^6$ داریم: $d\omega=6x^5\,dx$

$$\omega=0 \;\rightarrow\; x=0 \qquad , \qquad \omega=\infty \;\rightarrow\; x=\infty$$

پس با بازنویسی * به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^6}6x^5\,dx=\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; I=\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x}\,dx=\frac{\pi}{12}$$

مطابق تساوی پارسوال در انتگرالهای فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx=\int_0^\infty\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega \;\rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1)^2\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\right)^2 d\omega \;\rightarrow\; \frac{2}{\pi}=\int_0^\infty\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega \;\rightarrow$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; J=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال : باتوجه به معادله انتگرالی:

$$\begin{cases}2 & ;0<x<1\\ 3 & ;1<x<2\\ 0 & ;x>2\end{cases} = \int_0^\infty P(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

تابع $P(\omega)$ را پیدا کنید.

حل : ملاحظه می‌شود معادله داده شده در سمت چپ معادله مذکور تابعی تعریف شده در بازه $(0,+\infty)$ می باشد و در سمت راست، یک بیان انتگرالی فقط شامل جمله $\cos\omega x$ می باشد. لذا این طور تداعی می شود که تابع سمت چپ معادله را برای xهای منفی به فرم زوج گسترش داده و برای این تابع زوج درست شده، انتگرال فوریه نوشته‌ایم و طبیعتاً باید:

$$P(\omega)=A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1 2\cos\omega x\,dx+\int_1^2 3\cos\omega x\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^1+\frac{3}{\omega}\sin\omega x\Big|_1^2\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{\omega}\sin\omega+\frac{3}{\omega}(\sin 2\omega-\sin\omega)\right\}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x)=\int_0^{\infty} P(\omega)\cos\omega x\, d\omega$ و $x\, f(x)=\int_0^{\infty} q(\omega)\sin\omega x\, d\omega$. حاصل $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$ چه رابطه‌ای با $q(\omega)$ دارد؟

حل : از رابطه اول می‌توان دریافت $f(x)$ تابعی زوج بوده است و داریم:

$$P(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

همچنین از رابطه دوم می‌توان دریافت $x\, f(x)$ تابعی فرد بوده است و داریم:

$$q(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} x\, f(x)\sin\omega x\, dx$$

حال داریم:

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(f(x)\cos\omega x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\left(-x\sin\omega x\right)dx=-q(\omega)$$

تبدیلات فوریه

تبدیل فوریه کسینوسی $F_c\left(f(x)\right)=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$

تبدیل فوریه کسینوسی معکوس $F^{-1}\left(F_c(\omega)\right)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega$

تبدیل فوریه سینوسی $F_s\left(f(x)\right)=F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$

تبدیل فوریه سینوسی معکوس $F^{-1}\left(F_s(\omega)\right)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega$

تبدیل فوریه $F\left(f(x)\right)=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$

تبدیل فوریه معکوس $F^{-1}\left(F(\omega)\right)=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

یادآوری از تبدیل لاپلاس (برای محاسبه برخی از انتگرال‌های ناسره) :

تعریف تبدیل لاپلاس : $L\left(f(x)\right)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx=F(s)$

جدول تبدیل لاپلاس چند تابع مهم:

$f(x)$	a	e^{ax}	$\sin ax$	$\cos ax$	x^n
$F(s)$	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

چند قضیه

$$L(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$L(x f(x)) = -\frac{d}{ds} F(s) \qquad , \qquad L\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = \int_s^{+\infty} F(s)\, ds$$

چند قضیه در تبدیل فوریه

۱) قضیه تبدیل فوریه مشتق

اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

$$F\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\omega)^n F\{f(x)\}$$

۲) قضیه انتگرال

اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ بوده و $F(0) = 0$ باشد، آنگاه:

$$F\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

۳) قضیه تقارن

اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

$$F(F(x)) = 2\pi f(-\omega)$$

۴) قضیه اول انتقال

اگر $F\{f(x)\} = F(\omega)$ و a عددی ثابت باشد، آنگاه:

$$F(f(x-a)) = e^{-ia\omega} F(\omega)$$

۵) قضیه دوم انتقال

اگر $F(f(x)) = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

$$F\left(e^{iax} f(x)\right) = F(\omega - a)$$

۶) قضیه مشتق‌گیری از تبدیل فوریه

اگر $F(f(x)) = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

$$F\left(x^n f(x)\right) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$$

۷) تعریف انتگرال هم گردشی (کانولوشن) و قضایای آن

اگر $F(f(x)) = F(\omega)$ و $F(g(x)) = G(\omega)$ باشند، آنگاه:

$$(f * g)_{(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

$$F(f * g) = F(\omega)\, G(\omega) \qquad , \qquad F(f(x)\, g(x)) = \frac{1}{2\pi}\left(F(\omega) * G(\omega)\right)$$

۸) قضیه مقیاس

اگر $F\big(f(x)\big)=F(\omega)$ باشد، آنگاه: $F\big(f(ax)\big)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

تبدیل فوریه چند تابع مهم:

* $f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & ;x>0 \\ 0 & ;x<0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}$

* $f(x)=e^{-a|x|} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

* $f(x)=\begin{cases} 1 & ;|x|<a \\ 0 & ;|x|>a \end{cases} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\frac{2\sin a\omega}{\omega}$

* $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$

* $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\frac{-i\pi\omega}{a|\omega|}e^{-a|\omega|}$

* $f(x)=\frac{\sin ax}{x} \quad \rightarrow \quad F(\omega)=\begin{cases} \pi & ;|\omega|<a \\ 0 & ;|\omega|>a \end{cases}$

تبدیل فوریه توابع زیر را پیدا کنید:

۱) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}}$

$$F(\omega)=F\left(\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) \quad \rightarrow \quad F(\omega)=e^{-i\omega(-1)}F\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=e^{i\omega}\,\pi\, e^{-|\omega|}$$

۲) $\mathbf{f(x)=e^{-a|x|}\sin bx}$

$$F\left(e^{-a|x|}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad , \qquad \sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}$$

لذا:

$$F(\omega)=F\left(e^{-a|x|}\sin bx\right)=F\left(\frac{1}{2i}e^{-a|x|}e^{ibx}-\frac{1}{2i}e^{-a|x|}e^{-ibx}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2i}\left(\frac{2a}{a^2+(\omega-b)^2}-\frac{2a}{a^2+(\omega+b)^2}\right)$$

۳) $\mathbf{f(x)=e^{-ax^2}}$

$$f'(x)=-2axe^{-ax^2} \quad \rightarrow \quad f'(x)=-2axf(x) \quad \rightarrow \quad F\big(f'(x)\big)=F\big(-2axf(x)\big) \quad \rightarrow$$

$$i\omega F(\omega)=-2aiF'(\omega) \quad \rightarrow \quad F(\omega)=ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

می‌توان به‌دست آورد $c=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$، لذا:

$$F\left(e^{-ax^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

مثال : تبدیل فوریه کسینوسی $f(x) = xe^{-x}$ را پیدا کنید.

حل : طبق فرمول داریم:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x} \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ L(x \cos \omega x) \right\} \Big|_{s=1}$$

$$L\{\cos \omega x\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \rightarrow \quad L\{x \cos \omega x\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{1(s^2+\omega^2)-2s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

لذا :

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \right\} \Bigg|_{s=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$$

مثال : تبدیل فوریه سینوسی $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ را پیدا کنید

$$F_s(f(x)) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ L\left(\frac{\sin \omega x}{x}\right) \right\} \Bigg|_{s=1}$$

$$L\{\sin \omega x\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \rightarrow \quad \left\{\frac{\sin \omega x}{x}\right\} = \int_s^{+\infty} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \, ds = \operatorname{Arc\,tan} \frac{s}{\omega} \Big|_s^{\infty} = \operatorname{Arc\,tan} \frac{\infty}{\omega} - \operatorname{Arc\,tan} \frac{s}{\omega} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} \frac{s}{\omega}$$

لذا داریم :

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} \frac{s}{\omega} \right) \Bigg|_{s=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan} \frac{1}{\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Arc\,tan} \omega$$

مثال : تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & ; |x| < 1 \\ 0 & ; \text{بقیه جاها} \end{cases}$ را پیدا کنید.

حل : طبق تعریف داریم:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx = \int_{-1}^{1} x e^{-i\omega x} \, dx = \int_{-1}^{1} x(\cos \omega x - i \sin \omega x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \cos \omega x \, dx - i \int_{-1}^{1} x \sin \omega x \, dx = 0 - 2i \int_0^1 x \sin \omega x \, dx = -2i \left[-\frac{x}{\omega} \cos \omega x + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x \right]_0^1$$

$$= -2i \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega \right]$$

توجه داریم طبق روش جزء به جزء به دست می‌آید:

مشتق	انتگرال
x	$\sin\omega x$
1	$-\frac{1}{\omega}\cos\omega x$
0	$-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x$

(علامت‌ها: $+$ ، $-$)

مثال : تبدیل فوریه جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=\begin{cases}1 & ; \quad |x|<1\\ 0 & ; \quad |x|>1\end{cases}$ را $Y(\omega)$ نامیده‌ایم. $Y(\omega)$ را بیابید.

حل : نخست تبدیل فوریه تابع سمت راست معادله داده شده را پیدا می‌کنیم. اگر سمت راست را $f(x)$ بنامیم،طبق فرمول داریم:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-1}^{1}(\cos\omega x-i\sin\omega x)\,dx=2\int_{0}^{1}\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega x\Big|_{0}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

حال از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم و با توجه به قضیه $F\left(y^{(n)}(x)\right)=(i\omega)^n\,F\left(y(x)\right)$ داریم:

$$F(y'')+F(y)=F\left(f(x)\right)$$

$$(i\omega)^2\,Y(\omega)+Y(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}\quad\rightarrow\quad Y(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega\left(1-\omega^2\right)}$$

مثال : تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & ;x<0\\ e^{-4x}\sin 2x & ;x>0\end{cases}$ را بیابید.

حل :

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx=\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\sin 2x\,e^{-i\omega x}\,dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-(4+i\omega)x}\cdot\sin 2x\,dx$$

$$=\left\{L(\sin 2x)\right\}\Big|_{s=4+i\omega}=\frac{2}{s^2+4}\Big|_{s=4+i\omega}=\frac{2}{(4+i\omega)^2+4}$$

اعداد مختلط

مبناء تعریف اعداد مختلط

عنصر تعریف نشده در مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\sqrt{-1} = i$

بیان اعداد مختلط در فرم دکارتی: $z = x + iy$

z قسمت حقیقی : $\operatorname{Re} z = x$

z قسمت موهومی : $\operatorname{Im} z = y$

z قدر مطلق یا اندازه : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

z مزدوج : $\bar{z} = x - iy$

توجه مهم : ضرب یک مختلط در مزدوجش حاصلی حقیقی دارد.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

توصیف هندسی: هر عدد مختلط نظیر یک نقطه در صفحه است، یعنی :

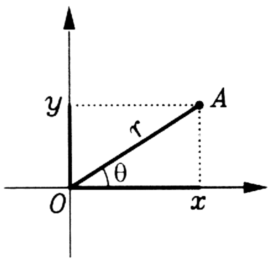
نقطه‌ای با مختصات (x , y) در صفحه دکارتی $\equiv z = x + iy$

دستگاه مختصات قطبی

OA : شعاع حامل نقطه A

r : طول شعاع حامل نقطه A

θ : زاویه‌ای که شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور x می‌سازد.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

θ : باتوجه به محل قرار گرفتن نقطه در صفحه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات واقع است، انتخاب می‌شود.

بیان اعداد مختلط در فرم قطبی:

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

z مدول : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, z آرگومان : $\theta = \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

بدیهی است:

$$\bar{z} = re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$(n \in N); \quad z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} = \frac{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}}{r_3 e^{i\theta_3}} = \frac{r_1 r_2}{r_3} e^{i(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)} = \cdots$$

معرفی چند منحنی خاص در صفحه مختلط

به سادگی می‌توان نشان داد اگر z_1 , z_2 دو عدد مختلط معلوم باشند (که دو نقطه را مشخص می‌کنند)، حاصل $|z_1 - z_2|$ مبین فاصله بین این دو نقطه خواهد بود. بنابراین اگر $z = x + iy$ فرض شود و R عددی حقیقی و مثبت باشد:

* $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1| = \mathbf{R}$ مبین دایره‌ای است به مرکز z_1 و شعاع R

* $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1| + |\mathbf{z} - \mathbf{z}_2| = \mathbf{R}$

با فرض $|z_1 - z_2| < R$ مبین بیضی با کانون‌های z_1 , z_2 است.

با فرض $|z_1 - z_2| = R$ مبین پاره‌خط واصل z_1 , z_2 است.

با فرض $|z_1 - z_2| > R$ مبین هیچ شکلی نیست. (تهی)

* $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1| - |\mathbf{z} - \mathbf{z}_2| = \mathbf{R}$

با فرض $|z_1 - z_2| > R$ مبین هذلولی با کانون‌های z_1 , z_2 است.

با فرض $|z_1 - z_2| = R$ مبین نیم‌خطی در امتداد واصل z_1 , z_2 و در سمت z_2 است.

با فرض $|z_1 - z_2| < R$ مبین هیچ شکلی نیست. (تهی)

* $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1| = |\mathbf{z} - \mathbf{z}_2|$ مبین عمودمنصف پاره‌خطی است با دو سر z_1 , z_2

* $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1| = \mathbf{R}|\mathbf{z} - \mathbf{z}_2|$ مبین یک دایره است. $(R \neq 1)$

محاسبه ریشه‌های nام و لگاریتم نپرین یک عدد مختلط

می‌دانیم اگر k عددی صحیح باشد، $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$ می باشد . لذا با فرض $z = r\,e^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

الف)

$$(n \in N);\quad \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = \left\{re^{i(\theta + 2k\pi)}\right\}^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$
$$= \sqrt[n]{r}\,\left\{\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right\}$$

می‌توان دید به از n مقدار متوالی برای k (مثلاً $k = 0 , 1 , \dots , n-1$)، n جواب متمایز از رابطه فوق به‌دست می‌آید و قرار دادن مقادیر دیگری برای k، به جواب‌های تکراری منجر خواهد شد.

پس هر عدد مختلط دارای n ریشه nاُم متمایز بوده که همگی در فاصله $\sqrt[n]{r}$ از مبداء مختصات قرار گرفته و رئوس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

ب)

$$\ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln\left(re^{i(\theta + 2k\pi)}\right) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \qquad ; \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

می‌توان دید به ازاء هر مقدار صحیح برای k، یک جواب از رابطه فوق به‌دست می‌آید و به تعبیری لگاریتم نپرین یک عدد مختلط دارای بیشمار مقدار است که قسمت حقیقی همگی $\ln r$ است و در فاصله ... , 2π , 2π در امتداد محور موهومی از هم قرار دارند.

مثال : مساحت شکلی که با رابطه $\left|\frac{z-i}{z+1}\right| = 2$ توصیف می‌شود را پیدا کنید.

حل :

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad \left|\frac{x + i(y-1)}{(x+1) + iy}\right| = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = 2 \quad \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right) \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 + 8x + 2y + 3 = 0 \quad (\text{دایره})$$

$$\rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

شکل موردنظر دایره‌ای است با مرکز $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ و شعاع $\sqrt{\frac{8}{9}}$. پس مساحت آن $\pi\left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2$ می‌باشد.

مثال : ناحیه‌ای که با رابطه $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+2i}\right) \geq 0$ توصیف می‌شود را مشخص کنید.

حل :

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{x + (y+2)i} \times \frac{x - (y+2)i}{x - (y+2)i} = \frac{x - i(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}$$

لذا :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+2i}\right) = \frac{x}{x^2 + (y+2)^2} \quad , \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+2i}\right) = \frac{-(y+2)}{x^2 + (y+2)^2}$$

پس ناحیه مورد نظر ما چنین است:

$$\frac{-(y+2)}{x^2 + (y+2)^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad -(y+2) \geq 0 \quad \rightarrow \quad y + 2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad y \leq -2$$

مثال : تمامی جواب‌های $A = (1+i)^{8i}$ را بیابید.

حل :

$$\ln A = 8i\ln(1+i) = 8i\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\} = 8i\ln\sqrt{2} - 8\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$A = e^{4i\ln 2 - (2\pi + 16k\pi)} = e^{4i\ln 2}\, e^{-2\pi(1+8k)}$$

$$A = e^{-2\pi(1+8k)}\left\{\cos(4\ln 2) + i\sin(4\ln 2)\right\} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

حد و پیوستگی در توابع مختلط

می‌گوئیم تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ دارای حد است، هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای حد باشند و همچنین $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است، هرگاه هر دو تابع u و v در نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشند.

یادآوری:

یک تابع حقیقی دو متغیره در یک نقطه دارای حد است ، هرگاه به هر طریقی که به آن نقطه نزدیک شویم، حاصل حد مذکور مستقل از مسیر نزدیک شدن، عددی یکتا باشد.

لذا اگر طریق پیدا کردن حاصل یک حد دو متغیره در جواب حاصله مؤثر باشد و به تعبیری لااقل به ازاء دو مسیر نزدیک شدن به نقطه مورد بحث، دو جواب متفاوت حاصل گردد، حد مورد نظر موجود نخواهد بود.

مثال : تابع مختلط $f(z)=xy+i\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)$ مفروض است. حد این تابع در نقطه $z=0$ کدام است؟

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)=\lim_{r\to 0,\forall\theta} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0,\forall\theta} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = (\text{صفر حدی})\times \text{کراندار} = 0$$

پس $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=0+i(0)=0$ می‌باشد.

مثال : تابع مختلط $f(z)\dfrac{xy}{x^2+y^2}+ie^{x+y}$ مفروض است. آیا این تابع در $z=0$ دارای حد است؟

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}\ \to\ \lim_{\substack{r\to0\\ \forall\theta}} \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2}=\lim_{\substack{r\to0\\ \forall\theta}}\cos\theta\sin\theta$$

به ازای مقادیر مختلف θ جواب یکتایی حاصل نمی‌شود پس حد مورد نظر موجود نمی‌باشد. بنابراین $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ موجود نیست.

مشتق توابع مختلط

مشتق تابع $f(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

همچنین مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 (در صورت وجود) به دو طریق زیر قابل محاسبه است:

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\qquad,\qquad f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

توجه:معمولاً مناسب است ارزیابی وجود مشتق و محاسبه مقدار آن را از طریق قضایای کوشی ریمان انجام دهیم.

قضایای کوشی ـ ریمان

قضیه اول :

هرگاه تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$$

و همچنین معادلات زیر که به معادلات کوشی ریمان موسومند، در نقطه (x_0,y_0) برقرارند.

$$CR\ .\ eq:\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

توجه:قضیه اول کوشی ریمان نمی‌گوید تابع $f(z)$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است. بلکه می‌گوید اگر $f(z)$ در نقطه‌ای مثل z_0 مشتق‌پذیر باشد، $f'(z_0)$ را چگونه می‌توان به‌دست آورد.

قضیه دوم:

هرگاه تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، در نقطه‌ای مانند (x_0,y_0) معادلات کوشی ریمان $\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}$ برقرار باشند و مضافاً توابع u,v,u_x,u_y,v_x,v_y در نقطه (x_0,y_0) و یک همسایگی این نقطه توابعی پیوسته باشند، آنگاه تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق‌پذیر است (و البته طبق قضیه اول کوشی ریمان $f'(z_0)=(u_x+iv_x)_{(x_0,y_0)}$ خواهد بود).

توجه:مطابق قضیه دوم کوشی ریمان، برقراری معادلات کوشی ریمان، شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق‌پذیری یک تابع مختلط می‌باشند. بنابراین عدم برقراری این معادلات در یک نقطه، عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط مورد نظر را در آن نقطه تضمین می‌کند.

مثال : تابع مختلط $f(z)=3\bar{z}+2\operatorname{Im}z$ مفروض است. این تابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر است؟

حل : با فرض $z=x+iy$ داریم :

$$f(z)=3(x-iy)+2y\quad\rightarrow\quad f(z)=3x+2y-3iy\quad\rightarrow\quad\begin{cases}u=3x+2y\\v=-3y\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود برای برقراری معادلات کوشی باید:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\quad\rightarrow\quad 3=-3\quad:\ (\text{غیر ممکن})\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

بنابراین معادلات CR هرگز ارضا نمی‌شود. لذا تابع $f(z)$ در هیچ جا مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مثال : تابع مختلط $f(z)=\left(x^2-y^2\right)+i\left(x^2+y^2\right)$ مفروض است. حاصل $f'(1+i)$ و $f'(1-i)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

حل :
$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=x^2+y^2 \end{cases}$$

برقراری معادلات کوشی ـ ریمان می‌طلبد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \;\to\; 2x=2y \;\to\; x=y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \;\to\; -2y=-2x \;\to\; x=y \end{cases}$$

این یعنی معادلات کوشی ـ ریمان فقط به ازای $x=y$ برقرار می‌شود.

بنابراین تا اینجا نتیجه می‌شود $f'(1-i)$ قطعاً موجود نمی‌باشد ($y=-1\,,\,x=1$). ولی شاید $f'(1+i)$ موجود باشد.

بدیهی است توابع $u\,,\,v\,,\,u_x\,,\,u_y\,,\,v_x\,,\,v_y$ همه‌جا پیوسته‌اند و البته در اطراف نقاطی که $x=y$ می‌باشد نیز پیوسته‌اند.

لذا تابع $f(z)$ در تمام نقاطی که $x=y$ می‌باشد مشتق‌پذیر است و لذا (طبق قضیه دوم کوشی ـ ریمان)، $f'(1+i)$ موجود است و طبق قضیه اول کوشی ریمان داریم:

$$f'(1+i)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(1,1)}=\left\{2x+i(2x)\right\}_{(1,1)}=2+2i$$

چند تعریف و قضیه و نکته

۱) تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی می‌گویند، هرگاه f در تابع z_0 و یک همسایگی z_0 مشتق‌پذیر باشد. (طبیعی است یک تابع ممکن است در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد ولی در آن نقطه تحلیلی نباشد)

۲) اگر $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط خاص، نقاط تکین تابع مذکور می‌گویند. (طبیعی است تابعی که همه‌جا تحلیلی است، نقطه تکین ندارد. همچنین برای تابعی که هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد نیز نقطه تکین تعریف نمی‌شود)

۳) توابع e^z و $\cos z$ و $\sin z$ و چند جمله‌ای‌های از z با درجهٔ دلخواه همه‌جا تحلیلی‌اند.

۴) اگر $g(z)$ و $f(z)$ تحلیلی باشند، توابع $f(z)\ \substack{\pm \\ \times}\ g(z)$ و $f(g(z))$ همه‌جا تحلیلی‌اند و تابع $\dfrac{1}{f(z)}$ همه‌جا به غیر از ریشه‌های معادله $f(z)=0$ تحلیلی است.

۵) توابع $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$ و $\bar{z}$ و $|z|$ هیچ‌جایی تحلیلی نیستند.

۶) مشتقات و انتگرال‌های یک تابع تحلیلی، توابعی تحلیلی می‌باشند.

۷) اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، برای بیان آن برحسب z کافی است در عبارت $u+iv$ همه xها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

۸) تابع حقیقی $h(x,y)$ را همساز می‌گویند، هرگاه در معادله لاپلاس صدق کند. یعنی:

$$\nabla^2 h=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

۹) اگر $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، آنگاه u و v توابعی همساز بوده و اصطلاحاً v را مزدوج همساز u می‌گویند و نیز وقتی u تابعی همساز باشد، v مزدوج همساز آن نامیده می‌شود هرگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و طبیعتاً برای یافتن v باید از معادلات کوشی ریمان $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ استفاده کرد.

مثال : تابع $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2$ مفروض است. اولاً ثابت‌های b , a را طوری پیدا کنید که u بتواند قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی باشد. ثانیاً تابع مختلط تحلیلی $f(z)=u+iv$ را برحسب z بیان کنید.

حل :

اولاً: اگر بخواهیم u قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی باشد، باید همساز باشد و این می‌طلبد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(6x+2ay)+2bx=0 \;\rightarrow\; (6+2b)x+2ay=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}6+2b=0 \;\rightarrow\; b=-3\\ 2a=0 \;\rightarrow\; a=0\end{cases}$$

پس فعلاً داریم:

$$u=x^3-3xy^2$$

ثانیاً:

راه اول: اگر بخواهیم $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، باید v مزدوج همساز u باشد و این می طلبد :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \;\rightarrow\; \dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2 \;\rightarrow\; v=3x^2y-y^3+A(x)\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x} \;\rightarrow\; \dfrac{\partial v}{\partial x}=-(-6xy) \;\rightarrow\; 6xy+A'(x)=6xy\end{cases}$$

$$\rightarrow\; A'(x)=0 \;\rightarrow\; A(x)=k$$

پس:

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+k$$

حال داریم:

$$f(z)=u+iv=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+k\right)$$

برای بیان تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب z کافی است تبدیلات $x\rightarrow z$ و $y\rightarrow 0$ را انجام دهیم.

$$f(z)=z^3+ik=z^3+c$$

راه دوم: مطابق قضیه اول کوشی ـ ریمان داریم (بدون محاسبه v) :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \;\rightarrow\; f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(3x^2-3y^2\right)+i(6xy)$$

چون $f(z)$ تحلیلی است پس $f'(z)$ نیز تحلیلی است. لذا با تبدیلات $x\rightarrow z$ و $y\rightarrow 0$ داریم:

$$f(z)=3z^2 \xrightarrow{\int} f(z)=z^3+c$$

مثال : تابع $f(z)=u(x\,,y)+iv(x)$ مفروض است. کلی‌ترین بیان این تابع مختلط برحسب z اگر بدانیم این تابع تحلیلی است چه خواهد بود؟

حل : برای تحلیلی بودن باید قضایای کوشی ـ ریمان همواره ارضا شود و این می‌طلبد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (\mathrm{I}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

چون طبق فرض v فقط تابعی از x است، لذا $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ و از معادله (I) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \to \quad u=u(y)$$

حال از معادله (II) می‌گوئیم:

$$u'(y)=-v'(x) \quad \to \quad u'(y)=-v'(x)=k \text{ ثابت}$$

لذا v' فقط تابعی از x و u' تابعی از y است. پس داریم:

$$u'(y)=k \quad \to \quad u(y)=ky+c_1$$
$$v'(x)=-k \quad \to \quad v(x)=-kx+c_2$$

لذا باید:

$$f(z)=u+iv=\left(ky+c_1\right)+i\left(-kx+c_2\right)=-ik(x+iy)+\left(c_1+ic_2\right) \quad \to \quad f(z)=-ikz+c$$

$k\,,c_1\,,c_2$: ثابت‌های حقیقی دلخواهند.

c: ثابت مختلط دلخواه

مثال : می‌دانیم $u(x\,,y)$ تابعی همساز است. مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \overline{z}}$؟

$$\begin{cases} z=x+iy \\ \overline{z}=x-iy \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x=\dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

مطابق قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

پس داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \overline{z}}=\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

پس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \overline{z}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

صفر است. زیرا در مسأله گفته شده است که u همساز است.

دو قضیه در باب توابع تحلیلی

قضیه اصل ماکسیمم:

هرگاه f در داخل ناحیه‌ای تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ دارای هیچ مقدار ماکسیممی در داخل آن ناحیه نیست. به تعبیر دیگر $|f(z)|$ مقدار ماکسیمم خود را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند. همچنین اگر f در هیچ نقطه‌ای از این ناحیه صفر نشود، مینیمم مقدار $|f(z)|$ نیز روی مرز این ناحیه رخ خواهد داد.

مثال : حداکثر مقدار $\left|s^{z^2+i}\right|$ در ناحیه $|z| \le 1$ را بیابید.

حل : تابع $f(z)=e^{z^2+i}$ همه جا تحلیلی است لذا در ناحیه داده شده نیز تحلیلی می‌باشد و طبق قضیه اصل ماکسیمم حداکثر مقدار خود را در این ناحیه روی مرز آن یعنی $|z|=1$ اختیار می‌کند. از آنجا که:

$$f(z)=e^{z^2+i}=e^{(x+iy)^2+i}=e^{x^2-y^2+i(2xy+1)} \quad \rightarrow$$
$$|f(z)|=\left|e^{x^2-y^2}\right|\left|e^{i(2xy+1)}\right|=e^{x^2-y^2}$$

بنابراین حداکثر مقدار $|f(z)|$ در ناحیه مورد بحث در نقطه $y=0$ و $x=\pm 1$ رخ می‌دهد، که برابر است با e.

قضیه لیوویل:

هرگاه f تابعی همه جا تحلیلی و کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است و به عبارتی هیچ تابع تحلیلی غیرثابتی وجود ندارد که کراندار باشد.

مثال : فرض کنید f تابعی تام (همه جا تحلیلی) باشد که مقادیر آن خارج دایره واحدند. در اینصورت f ....

۱) خطی کسری است.

۲) متناوب است.

۳) چند جمله‌ای از درجه بیش از یک است.

۴) ثابت است.

حل : چون f تابعی تام است و مقادیر آن خارج دایره واحد قرار دارد لذا

$$|f(z)|>1 \quad \rightarrow \quad f(z)\neq 0 \quad , \quad \left|\frac{1}{f(z)}\right|<1$$

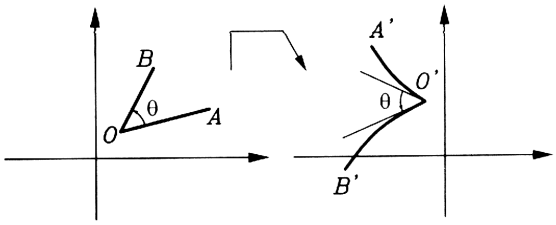
لذا $\frac{1}{f(z)}$ همه جا تحلیلی و کراندار است و طبق قضیه لیوویل تابعی ثابت است و به طبع $f(z)$ تابع ثابت است.

نگاشت

از نظر هندسی عملکرد یک تابع مختلط مانند $w = f(z)$ را می‌توان یک تبدیل دانست که هر نقطه از صفحه zها را به نقطه‌ای از صفحه w ها می‌نگارد.

✓ چند تعریف و قضیه و اصل:

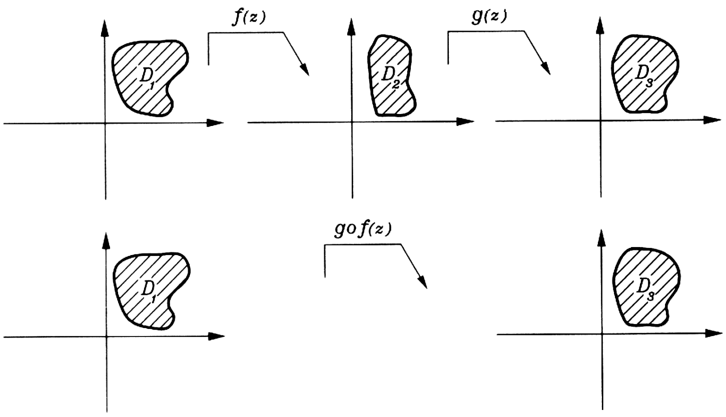
۱) نگاشت $w = f(z)$ را در نقطه z_0 همدیس می‌گوئیم هرگاه هر زاویه با رأس z_0 در صفحه z ها به زاویه‌ای هم اندازه و هم جهت با این زاویه در صفحه w ها تبدیل شود.



مطابق قضیه‌ای هرگاه $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی بوده و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد، نگاشت $w = f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است.

۲) نقاط ثابت یک نگاشت نقاطی هستند که تبدیل یافته‌شان تحت آن نگاشت دقیقاً مانند نقطه مذکور می‌باشد. لذا برای یافتن نقاط ثابت نگاشت $w = f(z)$ باید معادله $f(\alpha) = \alpha$ را حل کنیم.

۳) مطابق اصل ترکیب نگاشت‌ها داریم:



۴) مطابق اصل (حفظ مرز) تحت یک نگاشت مرزهای یک ناحیه به مرزهای ناحیه تبدیل یافته، نگاریده می‌شوند (مرز، باقی می‌ماند).

مطابق اصل (حفظ جهت) اگر با حرکت روی مرز از A به B ناحیه D سمت چپمان باشد با حرکت روی مرز تبدیل یافته از A' به B' (تبدیل یافته‌ها A و B) ناحیه D' (تبدیل یافته ناحیه D) سمت چپمان واقع خواهد شد. (در نگاشت‌های همدیس)

بررسی عملکرد چند نگاشت مقدماتی

۱) نگاشت کسری $w=\frac{1}{z}$

نگاشت مذکور در همه‌جا به غیر از در $z=0$ تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی $-\frac{1}{z^2}$ همواره مخالف صفر است. لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد. می‌توان این طور تصور کرد که نقاط ∞ و 0 با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به نقاط 0 و ∞ تبدیل می‌شوند.

توجه ۱ :

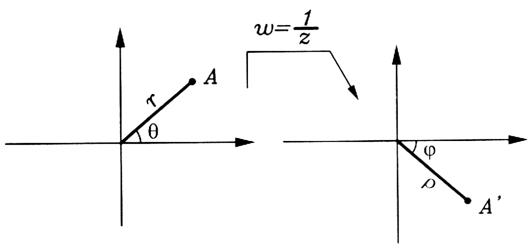
اگر فرض کنیم $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ ، تحت این نگاشت داریم:

$$w=\frac{1}{z} \quad \to \quad \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad \to \quad \begin{cases}\rho=\frac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}$$

یعنی نگاشت $w=\frac{1}{z}$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

ـ فاصله هر نقطه تا مبداء مختصات را معکوس می‌کند.

ـ زاویه شعاع حامل هر نقطه را منفی می‌کند.



توجه ۲ :

اگر فرض کنیم $w=u+iv$ و $z=x+iy$ تحت این نگاشت داریم:

$$w=\frac{1}{z} \;\to\; z=\frac{1}{w} \;\to\; x+iy=\frac{1}{u+iv} \;\to\; x+iy=\frac{1}{u+iv}\,\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \;\to\; \begin{cases}x=\frac{u}{u^2+v^2}\\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

از اینجا می‌توان نشان داد شکلی با معادله $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه z می‌باشد به شکلی با معادله $D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه w می‌باشد، تبدیل می‌شود.

مثال : ناحیه $\mathrm{Im}(z)\le 1$ از صفحهٔ z تحت نگاشت وارونی $\left(w=\frac{1}{z}\right)$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) $\left|w-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۲) $\left|w-\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۳) $\left|w+\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۴) $\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$

حل :

$$w=\frac{1}{z} \rightarrow z=\frac{1}{w} \rightarrow z=\frac{1}{u+iv}\frac{u-iv}{u-iv} \rightarrow z=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

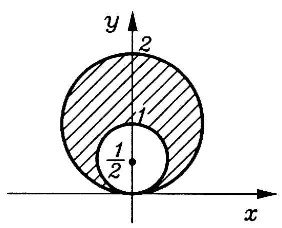
پس ناحیه $\operatorname{Im}(z)\le 1$ تبدیل می‌شود به:

$$\frac{-v}{u^2+v^2}\le 1 \rightarrow u^2+v^2\ge -V \rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{1}{4}$$

که مرز و بیرون دایره‌ای به مرکز $\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است و آن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$$

مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ پیدا کنید.



حل :

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$$

تبدیل یافته مرزها را پیدا می‌کنیم.

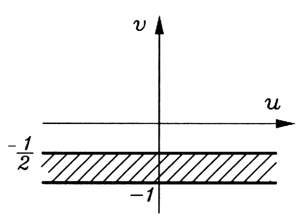
دایره کوچک : $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2-y=0$

با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$0\left(u^2+v^2\right)+0u-(-1)v+1=0 \rightarrow v=-1$$

دایره بزرگ : $x^2+(y-1)^2=(1)^2 \rightarrow x^2+y^2-2y=0 \rightarrow 2v+1=0 \rightarrow v=-\frac{1}{2}$

یک نقطه دلخواه از ناحیه اصلی در نظر می‌گیریم (مثلاً $z=\frac{3}{2}i$)، تبدیل یافته آن چنین می‌شود:



$$w=\frac{1}{\frac{3}{2}i}=-\frac{2}{3}i$$

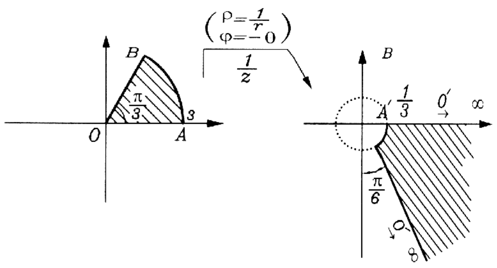
که در ناحیه $-1\le v\le\frac{-1}{2}$ قرار می‌گیرد.

مثال : خطی را که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند در نظر گرفته‌ایم. تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ ویژگی‌های شکل حاصله چه خواهد بود؟

حل : در صفحه xy خطی داریم که از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. یعنی $A = 0$ و $D \neq 0$ $(Bx + Cy + D = 0)$
پس در صفحه uv دایره‌ای داریم که از مبدأ مختصات می‌گذرد. یعنی $\left(D\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Cv = 0\right)$

مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ پیدا کنید.

حل :



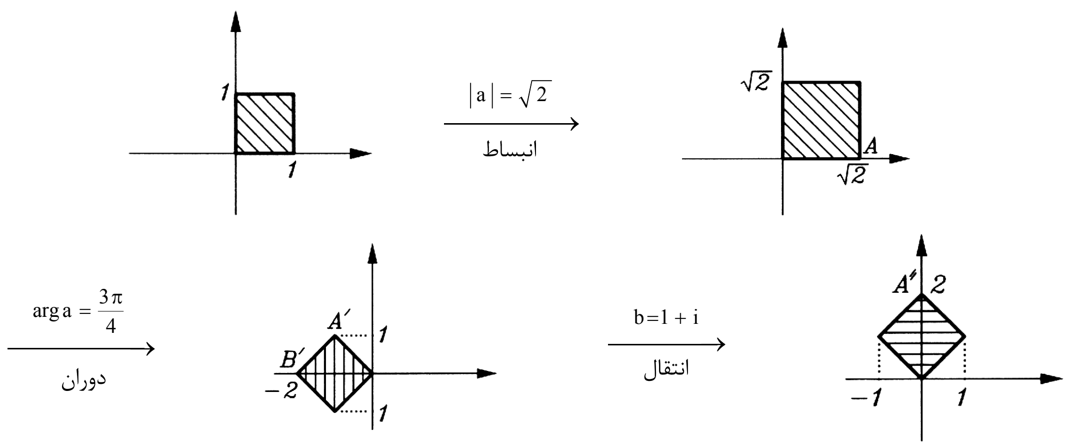
۲) نگاشت خطی $w = az + b$ (a , b اعداد مختلط دلخواه و $a \neq 0$)
نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی a همواره مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا همدیس می‌باشد.
می‌توان نشان داد این نگاشت سه عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

- فاصله هر نقطه را تا مبدأ، $|a|$ برابر می‌کند (انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ایجاد می‌شود).
- زاویه شعاع حامل هر نقطه را با $\operatorname{Arg} a$ جمع می‌کند (دورانی به اندازه $\operatorname{Arg} a$ حول مبدأ ایجاد می‌شود).
- طول و عرض هر نقطه را با $\operatorname{Re} b$ و $\operatorname{Im} b$ جمع می‌کند (انتقالی به اندازه b ایجاد می‌شود).

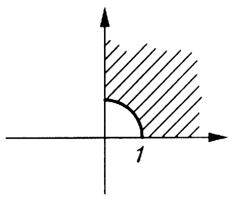
مثال : تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \le \operatorname{Re}\{z\} \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{array} \right\}$ را با نگاشت $w = (-1 + i)z + 1 + i$ به‌دست آورید.

حل : با در نظر گرفتن $a = -1 + i$ و $b = 1 + i$ یک نگاشت خطی داریم که سه عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$a = -1 + i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |a| = \sqrt{2} \\ \arg a = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

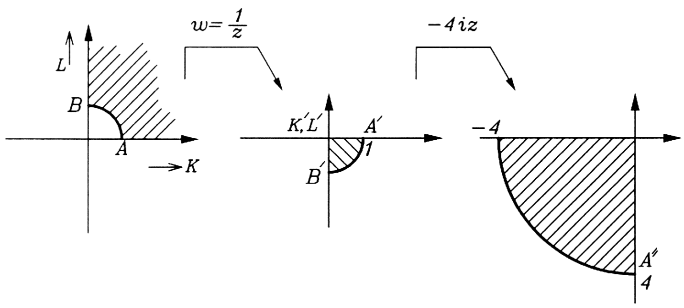


مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده در شکل زیر را تحت نگاشت $w=\dfrac{-4i}{z}$ پیدا کنید.



حل : w را می‌توان با ترکیب از انتهای دو نگاشت زیر پیدا کرد: $w=\dfrac{1}{z}\,,\,-4iz$

یعنی اگر از سمت راست نگاه کنیم و به جای z در $-4iz$ عبارت $\left(\dfrac{1}{z}\right)$ را قرار دهیم، به نگاشت اصلی می‌رسیم. حال با دیدن اعمال نگاشت فوق از ابتدا داریم:



۳) نگاشت توانی $w=z^n$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی nz^{n-1} در همه‌جا به غیر از در $z=0$ مخالف صفر است، لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد.

توجه ۱ : اگر فرض کنیم $w=\rho\, e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

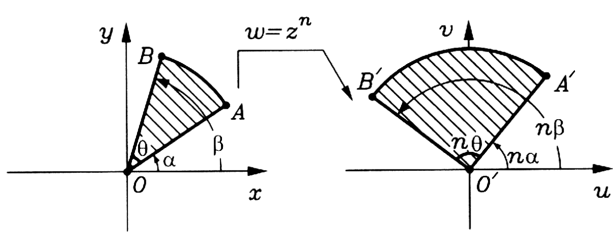
$$w=z^n \quad\rightarrow\quad \rho e^{i\varphi}=\left(r\,e^{i\theta}\right)^n=r^n\,e^{in\theta}\quad\rightarrow\quad \begin{cases}\rho=r^n\\ \varphi=n\theta\end{cases}$$

یعنی نگاشت $w=z^n$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

ـ فاصله هر نقطه تا مبدأ مختصات را به توان n می‌رساند.

ـ زاویه شعاع حامل هر نقطه را n برابر می‌کند.

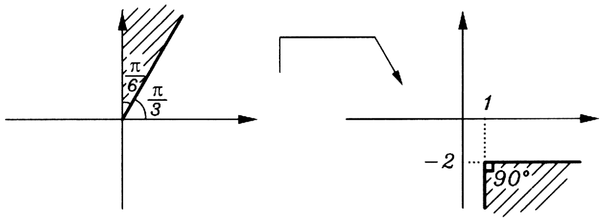
توجه ۲ :به شکل زیر دقت کنید:



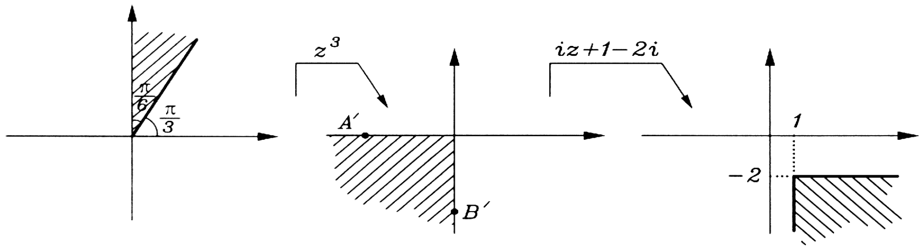
یعنی تحت نگاشت $w=z^n$ زاویه‌ای که رأس آن در مبدأ مختصات می‌باشد، با حفظ جهت، اندازه‌اش n برابر می‌شود.

مثال : نگاشتی پیدا کنید که ناحیه $D = \left\{ z \mid \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$ را به ناحیه $D' = \left\{ w \mid \operatorname{Re} w \ge 1 \,,\, \operatorname{Im} w \le -2 \right\}$ تبدیل کند.

حل : ترجمه شکلی مسئله:



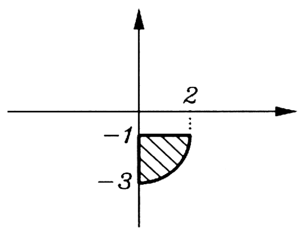
می‌گوئیم زاویه در مبدأ از $\frac{\pi}{6}$ به $\frac{\pi}{2}$ تبدیل شده، یعنی سه برابر شده است. پس از نگاشت z^3 استفاده کرده و داریم :



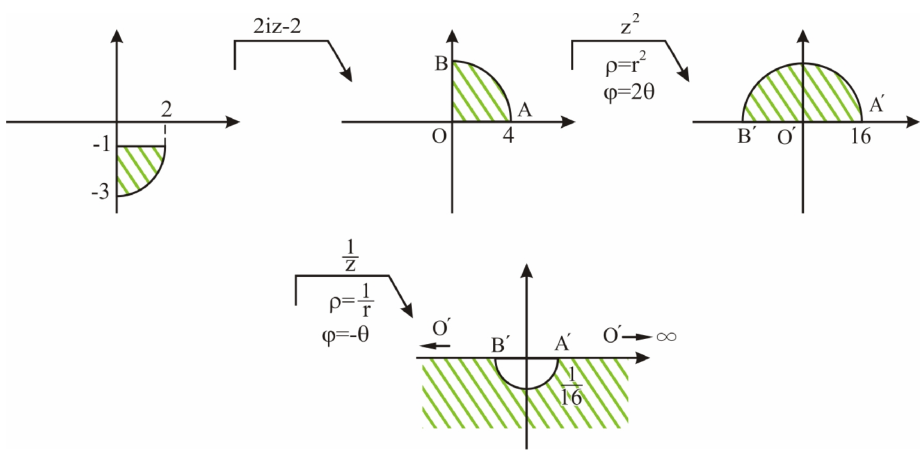
لذا نگاشتی که عمل فوق را یک ضرب انجام می‌دهد با ترکیب از انتهای نگاشت‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$w = (iz + 1 - 2i) \circ \left(z^3 \right) = iz^3 + 1 - 2i$$

مثال : تبدیل یافته ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = \dfrac{1}{(2iz - 2)^2}$ پیدا کنید.



حل : w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های $\frac{1}{z}$, z^2 , $(2iz - 2)$ یافت. حال با دیدن اعمال نگاشتهای فوق از ابتدا داریم:



مثال : خط $x = 2$ با نگاشت $w = iz^2$ به چه معادله‌ای در صفحه uv تبدیل می‌شود؟

حل :

$$w = iz^2 = i(x+iy)^2 = i\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) = -2xy + i\left(x^2 - y^2\right)$$

$$\begin{cases} u = -2xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \begin{cases} u = -4y \;\rightarrow\; y = -\dfrac{u}{4} \\ v = 4 - y^2 \end{cases} \rightarrow\; v = 4 - \left(\frac{-u}{4}\right)^2$$

۴) نگاشت ریشهٔ nام $w = \sqrt[n]{z}$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

همانطوری‌که می‌دانیم چنانچه $-\pi < \theta \le \pi$; $z = re^{i\theta}$ باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad ; \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

یعنی برای ریشه nام یک عدد مختلط، n جواب متمایز به‌دست می‌آید. اگر بخواهیم به $w = \sqrt[n]{z}$ به عنوان یک نگاشت (تابع تک مقداره) نگاه کنیم، باید رابطه گفته شده را به ازاء یک k خاص که معمولاً $k = 0$ انتخاب می‌شود، مدنظر قراردهیم و بدین‌ترتیب داریم:

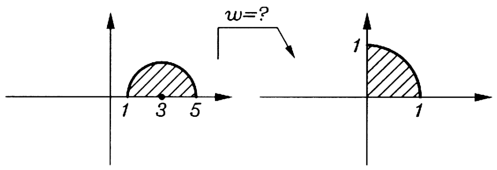
$$w = \sqrt[n]{z} \;\rightarrow\; \rho e^{i\varphi} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \;\rightarrow\; \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} \end{cases}$$

یعنی تحت نگاشت $w = \sqrt[n]{z}$ دو عمل متوالی زیر انجام می‌شود:

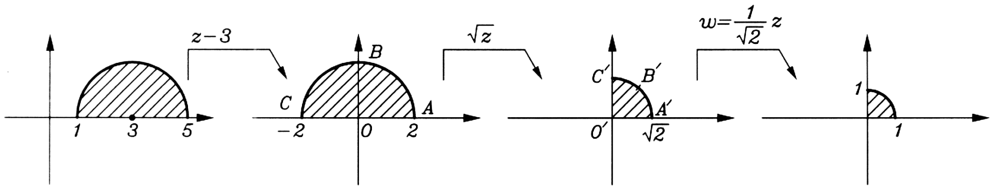
- فاصله هر نقطه تا مبدأ مختصات به توان $\frac{1}{n}$ می‌رسد.
- زاویه شعاع حامل هر نقطه $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود.

و به تعبیری نگاشت $w = \sqrt[n]{z}$ دقیقاً عملکردی شبیه نگاشت توانی دارد، البته با توان $\frac{1}{n}$.

مثال : نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد:



حل : زاویه مرکزی از 180° به 90° رسیده است، یعنی نصف شده است.لذا با توجه به عملکرد نگاشت $w = \sqrt{z}$ داریم:



پس نگاشت مورد نظر ما چنین است:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{z-3}$$

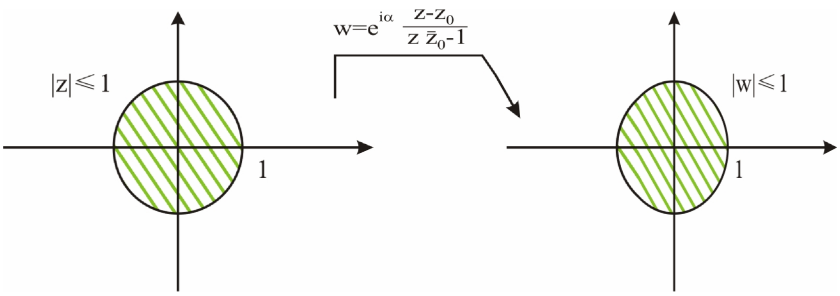
۵) نگاشت خطی کسری (موبیوس) $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (a , b , c , d اعداد مختلط دلخواه با شرط $ad-bc\neq 0$)

نگاشت مذکور همه‌جا به غیر از در $z=-\dfrac{d}{c}$ تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی $\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ همواره مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا به غیر از در $z=-\dfrac{d}{c}$ همدیس می‌باشد. می‌توان تصور کرد با این نگاشت نقاط $-\dfrac{d}{c}$ و $z=\infty$ به نقاط ∞ و $w=\dfrac{a}{c}$ تبدیل می‌شوند.

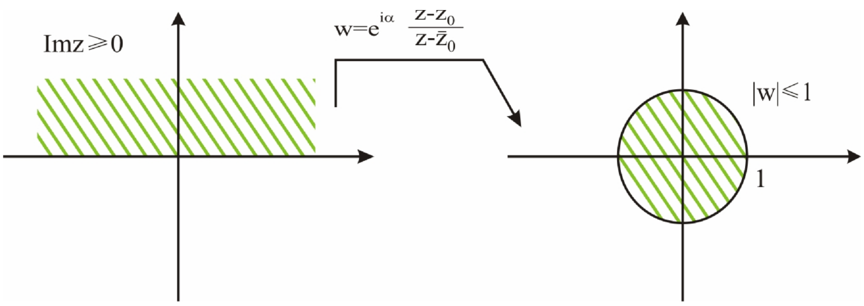
توجه ۱ :
این امکان وجود دارد سه نقطه z_1 , z_2 , z_3 از صفحه z ها را از طریق یک نگاشت موبیوس به سه نقطه w_1 , w_2 , w_3 از صفحه w ها بنگاریم، این نگاشت از رابطه $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\,\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\dfrac{w-w_1}{w-w_2}\,\dfrac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$
که به دستور صلیبی موسوم است به‌دست می‌آید. (در دستور صلیبی اگر یکی از z_iها یا w_iها ∞ بودند، کل صورت و مخرج شامل ∞ را با هم ساده می‌کنیم)

توجه ۲ :
تبدیل یافته هر خط و یا دایره ، تحت نگاشت موبیوس، یک خط و یا یک دایره (بدون رعایت ترتیب) خواهد بود و معادله شکل حاصله را می‌توان از طریق معادله نگاشت مورد نظر و معادله شکل اولیه پیدا کرد.

توجه ۳ :



$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \text{ عدد حقیقی دلخواه} \\ z_0 \text{ عدد مختلط دلخواه با شرط } |z_0|<1 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \text{ عدد حقیقی دلخواه} \\ z_0 \text{ عدد مختلط دلخواه با شرط } \operatorname{Im} z_0>0 \end{array}\right.$$

هر دو نگاشت فوق به واسطه داشتن دو پارامتر آزاد α و z_0 این امکان را فراهم می‌کنند علاوه بر تبدیلات گفته شده، دو نقطه دلخواه از نواحی سمت چپ را به دو نقطه دلخواه از نواحی سمت راست بنگاریم.

مثال : نگاشت $w=\frac{z-1}{z-2}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+1|=3$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟

۱) خطی موازی محور مختلط
۲) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد.
۳) دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات است.
۴) دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

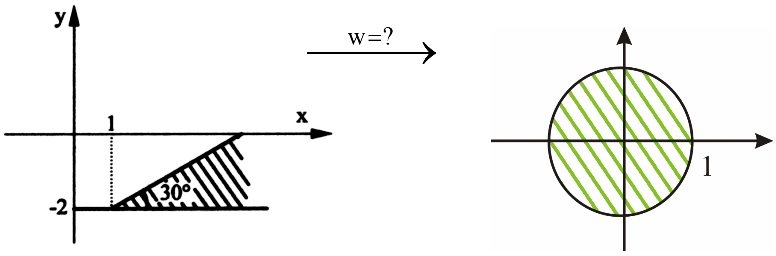
$$w=\frac{z-1}{z-2} \rightarrow wz-2w=z-1 \rightarrow z(w-1)=2w-1 \rightarrow z=\frac{2w-1}{w-1}$$

پس $|z+1|=3$ تبدیل می‌شود به:

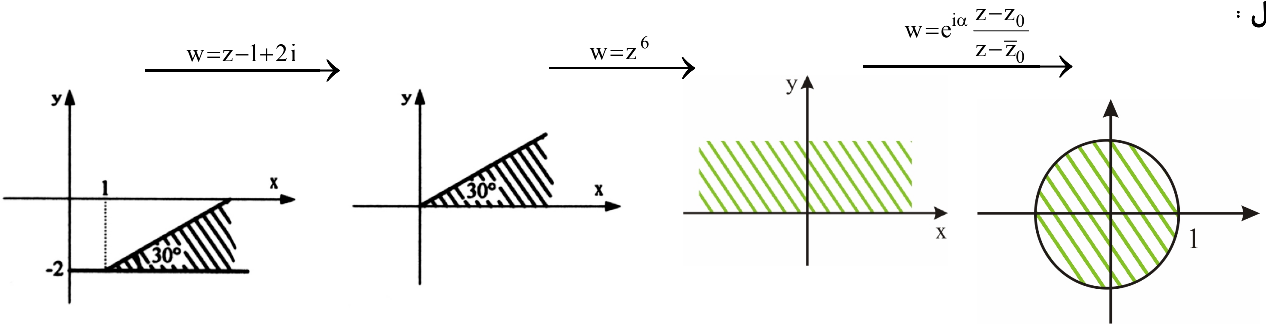
$$\left|\frac{2w-1}{w-1}+1\right|=3 \rightarrow \left|\frac{3w-2}{w-1}\right|=3 \rightarrow \left|w-\frac{2}{3}\right|=|w-1|$$

که نقاط روی عمود منصف پاره‌خطی با دو سر $w_2=1$ و $w_1=\frac{2}{3}$ است یعنی خط $u=\frac{5}{6}$ که خطی موازی محور مختلط است.

مثال : نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد:



حل :



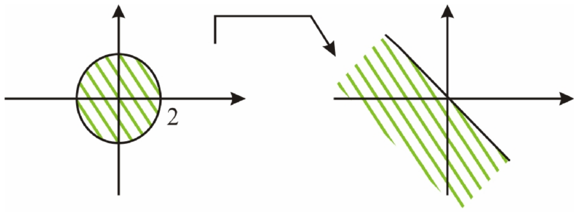
پس نگاشت مذکور با ترکیب از نگاشت‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$w=e^{i\alpha}\frac{(z-1+2i)^6-z_0}{(z-1+2i)^6-\overline{z}_0}$$

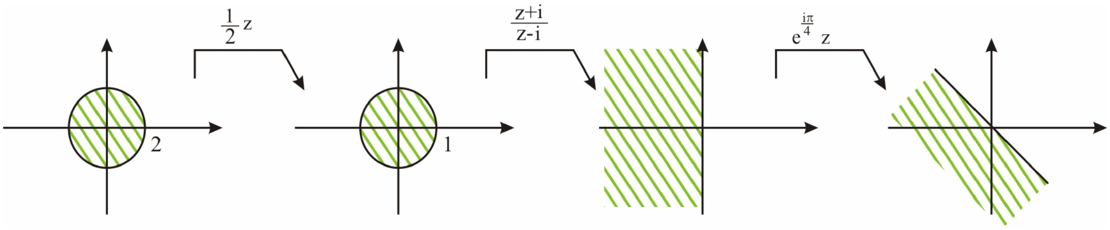
α عدد حقیقی دلخواه و z_0 عدد مختلط دلخواه با قسمت موهومی مثبت می‌باشد.

مثال : کدام تبدیل، دیسک $|z|<2$ را روی ناحیه $u+v<0$ تصویر می‌کند؟

حل : هدف انجام عمل زیر است:



می‌توان دید:



پس با ترکیب نگاشت‌های بالا از انتها، نگاشت مورد نظر به دست می‌آید که چنین است:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{2}z+i}{\frac{1}{2}z-i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{z+2i}{z-2i}$$

دقت کنید با نگاشت $\frac{z+i}{z-i}$ داریم:

$$A:-i \;\to\; A'=0$$

$$B=1 \;\to\; B'=\frac{1+i}{1-i}=i$$

$$C=i \;\to\; C'=\infty$$

۶) نگاشت یا کوفسکی $w=z+\frac{1}{z}$

نگاشت مذکور همه‌جا به غیر از در $z=0$ تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی $1-\frac{1}{z^2}$ همه‌جا به غیر از در $z=\pm 1$ مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا به غیر از در ± 1 و $z=0$ همدیس می‌باشد.

توجه ۱ :

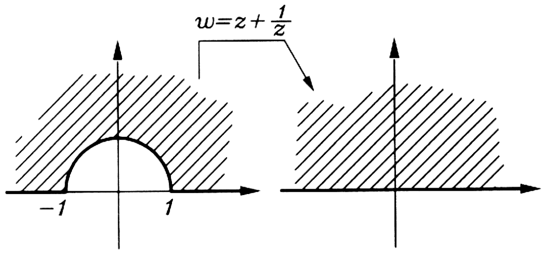
اگر فرض کنیم $w=u+iv$ و $z=re^{i\theta}$ باشند ، تحت این نگاشت داریم:

$$w=z+\frac{1}{z} \quad\to\quad u+iv=re^{i\theta}+\frac{1}{re^{i\theta}}=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad\to$$

$$u+iv=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta) \quad\to\quad \begin{cases} u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

و با این روابط به سادگی تبدیل یافته دوایر $r=c$ و نیم خطوط $\theta=k$ قابل تعیین است.

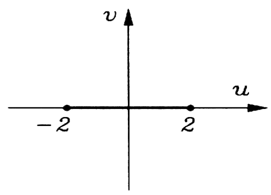
توجه ۲ :



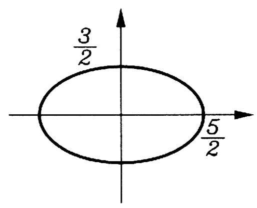
مثال : تبدیل یافته دوایر $r=1$, $r=2$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ پیدا کنید.

$$w=z+\frac{1}{z} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

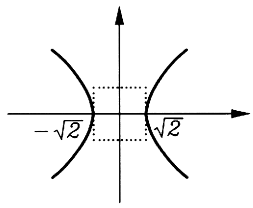
$$r=1 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u=2\cos\theta \\ v=0 \end{cases}$$



$$r=2 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u=\frac{5}{2}\cos\theta \\ v=\frac{3}{2}\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1} \frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$



$$\theta=\frac{\pi}{4} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u^2=\left(r^2+\frac{1}{r^2}+2\right)\frac{1}{2} \\ v^2=\left(r^2+\frac{1}{r^2}-2\right)\frac{1}{2} \end{cases} \quad\rightarrow\quad u^2-v^2=2$$



و چون می‌دانیم: (اگر a یک عدد حقیقی باشد)

$$\begin{cases} a+\frac{1}{a}\geq 2 & ;a>0 \\ a+\frac{1}{a}\leq -2 & ;a<0 \end{cases}$$

در مورد آخر می‌گوئیم:

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\geq\sqrt{2}$$

یعنی فقط شاخه سمت راست هذلولی مدنظر خواهد شد.

۷) نگاشت نمایی $w=e^z$

نگاشت مذکور در همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی e^z همواره مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا همدیس می‌باشد.

از آنجا که $e^{z+2\pi i}=e^z$ لذا این نگاشت متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشد، یعنی تمام نقاطی که x یکسان دارند و yشان با هم 2π اختلاف دارد، تحت این نگاشت به نقطه واحدی در صفحه w تبدیل می‌شوند.

توجه ۱ :

$$w = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\, e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = e^{x} \cos y \\ v = e^{x} \sin y \end{cases}$$

به وضوح دیده می‌شود با تبدیل $y \rightarrow y + 2\pi$ تغییری در مقادیر $u\,,\,v$ حاصل نمی‌گردد.

توجه ۲ :

$$w = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\, e^{iy} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho = e^{x} \\ \varphi = y \end{cases}$$

به وضوح دیده می‌شود با تبدیل $y \rightarrow y + 2\pi$ تغییری در مقادیر φ و ρ حاصل نمی‌گردد.

ملاحظه می‌شود تحت نگاشت $w = e^{z}$:

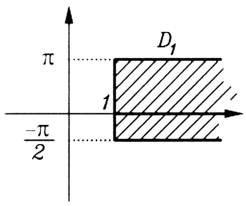
ـ خطوط $x = c$ به قوس‌های دایره‌ای $\rho = e^{c}$ که مرکزشان در مبدأ می‌باشد، تبدیل می‌شوند.

ـ خطوط $y = k$ به نیم خطوط $\varphi = k$ که از مبدأ می‌گذرند، تبدیل می‌شوند.

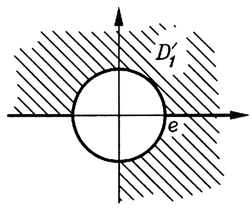
مثال : تبدیل یافته نواحی $D_1 = \left\{ z \,|\, 1 \le \operatorname{Re} z < +\infty \,,\, -\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Im} z \le \pi \right\}$ و $D_2 = \{ z \,|\, -\infty < \operatorname{Re} z \le 0 \,,\, 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi \}$ را با نگاشت $w = e^{z}$ پیدا کنید.

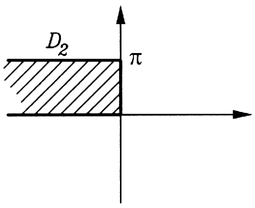
حل :

$$w = e^{z} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho = e^{x} \\ \varphi = y \end{cases}$$

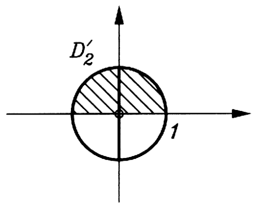


$$\begin{cases} 1 \le x < +\infty \quad \rightarrow \quad e^{1} \le \rho < e^{+\infty} \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \pi \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{cases}$$





$$\begin{cases} -\infty < x \le 0 \quad \rightarrow \quad e^{-\infty} < \rho \le e^{0} \\ 0 \le y \le \pi \quad \rightarrow \quad 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$



۸) نگاشت لگاریتم نپرین $w = \ln z$

همانطوری‌که می‌دانیم چنانچه $-\pi < \theta \le +\pi \quad ; \quad z = r\, e^{i\theta}$ باشد داریم:

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \qquad , \qquad (k = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots)$$

یعنی برای لگاریتم یک عدد مختلط، بیشمار جواب متمایز به‌دست می‌آید.

اگر بخواهیم به $w = \ln z$ به عنوان یک نگاشت (تابع تک مقداره) نگاه کنیم، باید رابطه گفته شده را به ازاء یک k خاص که معمولاً $k = 0$ انتخاب می‌شود، مدنظر قرار دهیم و بدین‌ترتیب داریم:

$$w = \ln z = \ln r + i\theta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

یعنی تحت این نگاشت:

ـ دوایر $r = c$ به خطوط $u = \ln c$ تبدیل می‌شوند.

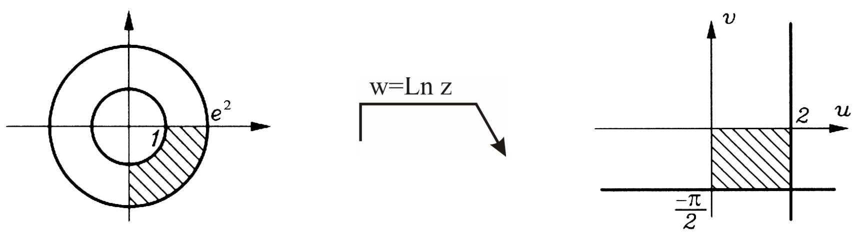
ـ نیم خطوط $\theta = k$ به خطوط $v = k$ تبدیل می‌شوند.

مثال : تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \mid 1 \le |z| \le e^2 \ , -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le 0 \right\}$ را تحت نگاشت $w = \ln z$ بیابید.

حل :

$$w = \ln z \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \quad \rightarrow \quad u = \ln 1 = 0 \\ r = e^2 \quad \rightarrow \quad u = \ln e^2 = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad v = -\frac{\pi}{2} \\ \theta = 0 \quad \rightarrow \quad v = 0 \end{cases}$$



۹) نگاشت سینوس و کسینوس $w = \cos z \quad , \quad w = \sin z$

هر دو نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی‌اند و:

ـ در نقاط $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ یعنی جاهایی که مشتق $\sin z$ صفر می‌شود، نگاشت $w = \sin z$ همدیس نمی‌باشد.

ـ در نقاط $z = k\pi$ یعنی جاهایی که مشتق $\cos z$ صفر می‌شود، نگاشت $w = \cos z$ همدیس نمی‌باشد.

همچنین هر دو نگاشت مذکور توابعی متناوب با دوره متناوب 2π هستند.

توجه ۱ :

از آنجا که:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad , \quad \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

داریم:

$$\sin i\alpha = i \sinh \alpha \quad , \quad \cos i\alpha = \cosh \alpha$$

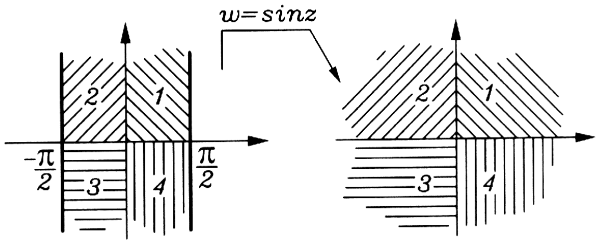
لذا می‌توان نوشت:

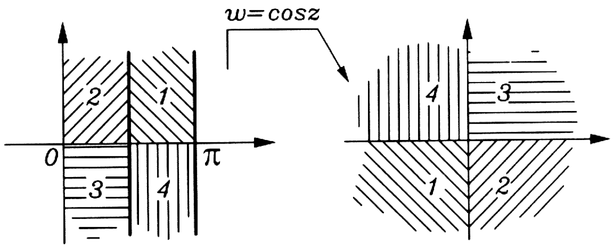
$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

و از اینجا به سادگی می‌توان دید سینوس و کسینوس با آرگومان مختلط هیچگونه محدودیتی در جواب خروجی ندارند.

توجه:





مثال : معادله $\sin z = 2i$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i \quad \to \quad e^{iz} - e^{-iz} = -4$$

با فرض $e^{iz} = t$:

$$t - \frac{1}{t} = -4 \quad \to \quad t^2 + 4t - 1 = 0 \quad \to \quad t = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}$$

باتوجه به این‌که:

$$\ln A = \ln|A| + i(\arg A + 2k\pi)$$

حال می‌گوئیم:

$$t = -2 + \sqrt{5} \quad \to \quad e^{iz} = -2 + \sqrt{5} \quad \xrightarrow{\ln} \quad iz = \ln\left(-2+\sqrt{5}\right) = \ln\left(-2+\sqrt{5}\right) + i(0 + 2k\pi) \quad \to$$

$$z = -i\ln\left(-2+\sqrt{5}\right) + (2k\pi) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$t = -2 - \sqrt{5} \quad \to \quad e^{iz} = -2 - \sqrt{5} \xrightarrow{\ln} iz = \ln\left(-2-\sqrt{5}\right) = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) + i(\pi + 2k\pi) \quad \to$$

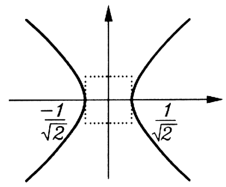
$$z = -i\ln\left(5+\sqrt{5}\right) + (\pi + 2k\pi) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

مثال : تحت نگاشت $w = \sin z$ خطوط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $y = 1$ به چه اشکالی تبدیل می‌شوند.

حل :

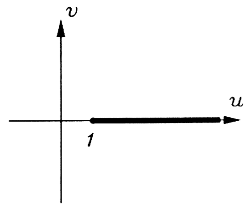
$$w = \sin z \quad \to \quad \begin{cases} u = \sin x \ \cosh y \\ v = \cos x \ \sinh y \end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{4} \to \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh y \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh y \end{cases} \xrightarrow{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1} 2u^2-2v^2=1$$ (هذلولی)

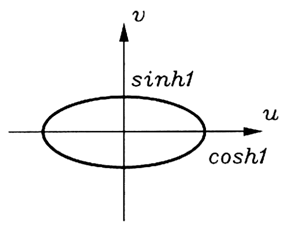


توجه داریم چون $\cosh y \geq 1$ پس $u \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد. یعنی فقط شاخه سمت راست این هذلولی پذیرفته است.

$$x=\frac{\pi}{2} \to \begin{cases} u=\cosh y \geq 1 \\ v=0 \end{cases}$$ (خط)



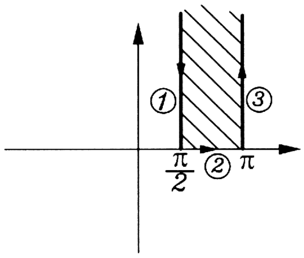
$$y=1 \to \begin{cases} u=\sin x \cosh 1 \\ v=\cos x \sinh 1 \end{cases} \to \frac{u^2}{(\cosh 1)^2}+\frac{v^2}{(\sinh 1)^2}=1$$ (بیضی)



مثال : تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \pi \text{ , } \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$ را تحت نگاشت $w=\cos z$ پیدا کنید.

حل :

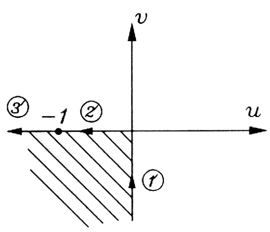
$$w=\cos z \to \begin{cases} u=\cos x \cosh y \\ v=-\sin x \sinh y \end{cases}$$



$$① \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \\ y:+\infty \to 0 \end{cases} \to \begin{cases} u=0 \\ v=-\sinh y \end{cases}$$

$$② \begin{cases} y=0 \\ x:\frac{\pi}{2} \to \pi \end{cases} \to \begin{cases} u=\cos x \\ v=0 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} x=\pi \\ y:0 \to +\infty \end{cases} \to \begin{cases} u=-\cosh y \\ v=0 \end{cases}$$



دقت داریم طبق نکات گفته شده برای نگاشت $w=\cos z$ ، بدون حل نیز صحت ناحیه سوم به عنوان جواب معلوم می‌شود.

مثال : تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0,-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{2}\right\}$ را تحت نگاشت $w=-\sin h(\pi z)+1+2i$ تعیین کنید.

حل :

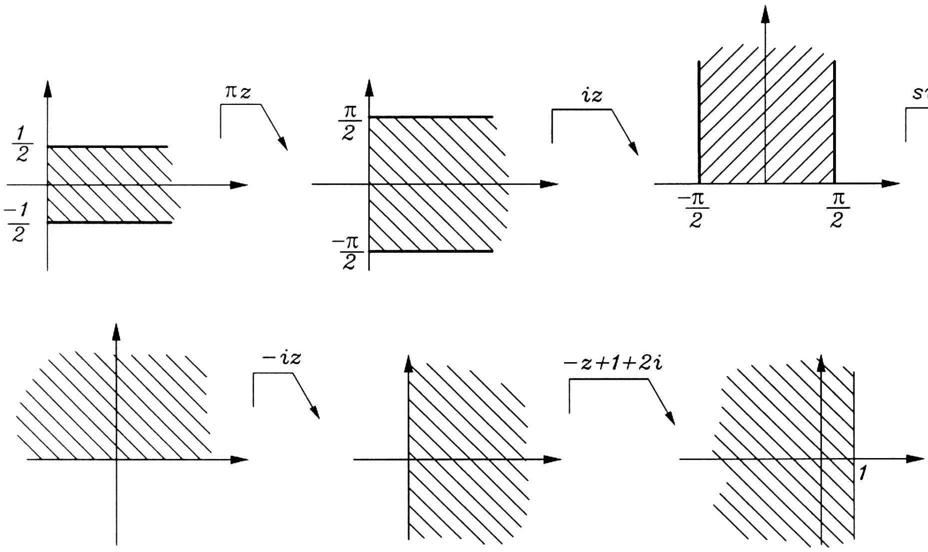
ترکیب از انتها $\quad : \pi z\ ,\ -\sin hz+1+2i$

$: \pi z\ ,\ \sin hz\ ,\ -z+1+2i$

$: \pi z\ ,\ iz\ ,\ -i\sin z\ ,\ -z+1+2i$

$: \pi z\ ,\ iz\ ,\ \sin z\ ,\ -iz\ ,\ -z+1+2i$

حال با دیدن اعمال از ابتدا داریم:



انتگرال‌های مختلط

✓ روش مستقیم محاسبه انتگرال‌های مختلط

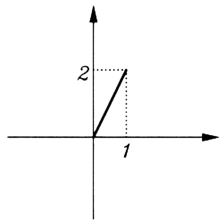
روال کلی برای محاسبه یک انتگرال مختلط که قرار است روی یک منحنی معلوم مانند c به‌دست آورده شود، آن است که باتوجه به معادله منحنی c و ارتباطی که بین متغیرها بر روی این منحنی وجود دارد، تمام متغیرها را در عبارت زیر علامت انتگرال، برحسب یک متغیر نوشته و باتوجه به حدود تغییرات آن متغیر، یک انتگرال معین معمولی را حل کنیم.

باید به خاطر داشته باشیم در حالت کلی حاصل یک انتگرال مختلط علاوه برنقاط ابتدایی و انتهایی مسیر، به خود مسیر نیز وابسته است، مگر در حالت خاص زیر:

هرگاه $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقاطی خاص تحلیلی باشد، حاصل $\int f(z)\,dz$ روی هر مسیر باز دلخواهی که نقطه z_1 را به نقطه z_2 وصل می‌کند (و البته این مسیر از روی نقاط تکین احتمالی تابع $f(z)$ نمی‌گذرد)، مستقل از مسیر بوده و چنانچه $F(z)$ یک تابع اولیه $f(z)$ باشد $\left(F'(z)=f(z)\right)$، حاصل انتگرال مذکور $F(z_2)-F(z_1)$ خواهد بود.

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_c \operatorname{Re}\left(z^2\right).\,d\bar{z}$ که در آن c پاره‌خطی است که مبدأ مختصات را به نقطه $1+2i$ وصل می‌کند.

حل :



$$c: y=2x$$

در حالت کلی داریم:

$$z=x+iy \;\rightarrow\; \begin{cases} z^2=x^2-y^2+i2xy \;\rightarrow\; \operatorname{Re}\left(z^2\right)=x^2-y^2 \\ \bar{z}=x-iy \;\rightarrow\; dz=dx-idy \end{cases}$$

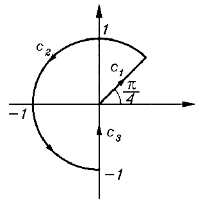
حال روی منحنی c داریم:

$$y=2x \;\rightarrow\; dy=2dx$$

و می‌توان نوشت:

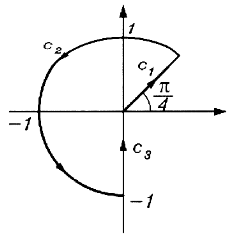
$$I=\int_{x=0}^{1}\left\{x^2-(2x)^2\right\}\left\{dx-i(2\,dx)\right\}=\int_0^1\left(-3x^2\right)(1-2i)\,dx=-(1-2i)\,x^3\Big|_0^1=-(1-2i)$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\oint_c \bar{z}\,dz$ که در آن c منحنی نشان داده شده در شکل زیر است:



حل:

در حالت کلی داریم:



$$z=r\,e^{i\theta}\quad\rightarrow\quad \bar{z}=r\,e^{-i\theta}$$

$$c_1:\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{4}\\ r:0\to 1\end{cases}\qquad c_2:\begin{cases}r=1\\ \theta:\frac{\pi}{4}\to\frac{3\pi}{2}\end{cases}\qquad c_3:\begin{cases}\theta=\frac{3\pi}{2}\\ r:1\to 0\end{cases}$$

داریم:

$$I=\oint_c=\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}$$

$$I=\int_{r=0}^{1}\left(r\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)d\left(r\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1e^{-i\theta}\right)d\left(1\,e^{i\theta}\right)+\int_{r=1}^{0}\left(re^{-i\frac{3\pi}{2}}\right)d\left(r\,e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$=\int_0^1 r\,dr+i\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}e^{-i\theta}\,e^{i\theta}\,d\theta+\int_1^0 r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^1+i\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{r^2}{2}\Big|_1^0=i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5i\pi}{4}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}\,dz$ که در آن c منحنی دلخواهی است که نقطه $z=-i$ را به $z=1$ وصل می‌کند و البته از مبدا نمی‌گذرد.

حل: $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$ همه‌جا به جزء $z=0$ تحلیلی است. و البته تابع اولیه آن $-e^{\frac{1}{z}}$ است. لذا طبق نکات گفته شده:

$$I=-e^{\frac{1}{z}}\Big|_{-i}^{1}=-\left(e^1-e^i\right)$$

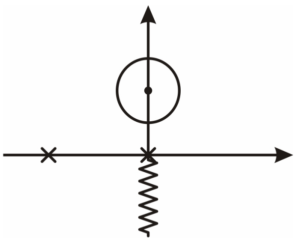
قضیه : هرگاه تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقاطی خاص تحلیلی باشد و هیچ‌کدام از نقاط تکین احتمالی $f(z)$ در داخل ناحیه محصور شده به مرز بسته C قرار نگیرد (البته هیچ‌کدام از نقاط تکین احتمالی $f(z)$ حق قرار گرفتن روی مرز C را ندارند)، آنگاه داریم:

$$\oint_C f(z) = dz = 0$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c \frac{\ln z}{z^2 + 2z} dz$ که در آن $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{3\pi}{2}$: $\ln z = \ln r + i\theta$ و c دایره $|z - 3i| = 1$ می‌باشد.

حل : $\ln z$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاط مربوط به بریدگی شاخه‌ای این تابع که باتوجه به تعریف صورت گرفته $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{3\pi}{2}$ نقاط واقع بر نیم‌خط $\theta = \frac{-\theta}{2}$ می‌باشد، تحلیلی است. البته عبارت زیر انتگرال در نقاط $z = 0 , -2$ که مخرج کسر $\frac{\ln z}{z^2 + 2z}$ را نیز صفر می‌کنند، نیز تحلیلی نمی‌باشد.

این نقاط تکین در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



$I = 0$ (طبق قضیه انتگرالی کوشی ـ گورسا)

ناحیهٔ همگرائی سری‌های مختلط

برای تعیین ناحیه همگرائی سری تابعی $\sum_{n=}^{\infty} a(n, z)$ کافی است یکی از نامعادلات زیر را حل کنیم و zهایی را تعیین کنیم که به ارضاء آن‌ها می‌پردازد.

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n+1, z)}{a(n, z)} \right| < 1 \qquad \text{یا} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a(n, z)|} < 1$$

دقت کنید اگر ناحیه همگرائی به‌دست آمده یک دایره باشد، شعاع آن دایره را شعاع همگرائی سری مذکور می‌نامند.

توجه:

در محاسبه حدهای نوشته شده ممکن است استفاده از موارد زیر مفید باشد.

الف) وقتی $n \to +\infty$ و $a > 1 , b > 0 , c > 1$ داریم:

$$\log_a^n << n^b << c^n$$

ب) وقتی $n \to +\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

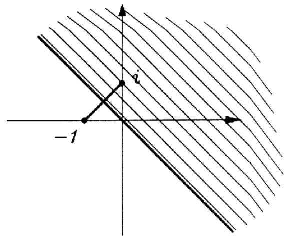
ج) به خاطر داشته باشید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}=e^{\alpha\beta} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a n^k+b n^{k-1}+\dots}=1$$

مثال : ناحیه همگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید و روی شکل نمایش دهید.

۱) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n$

حل : شرط همگرایی:

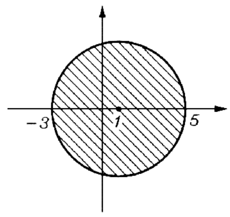


$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n\right|}<1 \;\to\; \left|\frac{z-i}{z+1}\right|<1 \;\to\; |z-i|<|z+1|$$

۲) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{3^n+4^n}$

حل : شرط همگرایی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^n\left(n^2+3n+1\right)}{3^n+4^n}\right|}<1$$



$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z-1|\sqrt[n]{n^2+3n+1}}{\sqrt[n]{3^n+4^n}}<1 \;\to\; \frac{|z-1|\times 1}{4}<1 \;\to\; |z-1|<4$$

و چون ناحیه همگرایی دایره‌ای به شعاع 4 است، پس شعاع همگرایی $R=4$ می‌باشد.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{z}}$

حل : شرط همگرایی:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{-\frac{n}{z}}\right|}<1 \;\to\; \left|e^{-\frac{1}{z}}\right|<1 \;\to\; \left|e^{-\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}}\right|<1 \;\to\; \left|e^{-\frac{(x-iy)}{x^2+y^2}}\right|<1 \;\to$$

$$\left|e^{\frac{-x}{x^2+y^2}}\right|\left|e^{\frac{iy}{x^2+y^2}}\right|<1 \;\to\; e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}<1 \;\to\; \frac{-x}{x^2+y^2}<0 \;\to\; x>0$$

نکته : اگر α حقیقی باشد:

$$\left|e^{\alpha}\right| = e^{\alpha} \qquad , \qquad \left|e^{i\alpha}\right| = \left|\cos\alpha + i\sin\alpha\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

✓ بسط تیلور و مک لوران یک تابع

بسط تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n = a_0 + a_1\left(z - z_0\right) + a_2\left(z - z_0\right)^2 + \dots$$

که در آن ضرایب بسط تیلور از رابطه $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ به‌دست می‌آیند. و شعاع همگرائی این بسط برابر است با min فاصله z_0 تا همه نقاط تکین تابع $f(z)$ اعم از تکنیک‌های حقیقی و یا مختلط.

مطابق تعریف بسط تیلور یک تابع حول نقطه $z_0 = 0$ را بسط مک لوران آن تابع می‌گویند.

چند بسط مک لوران

برای همه مقادیر z :

$$\begin{cases} e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

برای $|z|<1$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \\ \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + - \dots \end{cases}$$

مثال : در بسط مک لوران تابع $f(z) = \left(3z^2 + 4z - 1\right)e^{z^2}$ ضریب جمله z^6 را پیدا کنید.

حل :

$$f(z) = \left(3z^2 + 4z - 1\right)\left\{1 + z^2 + \frac{\left(z^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(z^2\right)^3}{3!} + \dots\right\}$$

در کل جمله z^6 دو بار حاصل می‌شود که ضریب آن چنین است:

$$3\left(\frac{1}{2!}\right)+(-1)\left(\frac{1}{3!}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

مثال : در بسط مک لوران تابع $f(z)=\sin z\,.\ln\left(1+z^2\right)$ با شرط $|z|<1$ ضریب جمله z^5 کدام است؟

حل : (با شرط $|z|<1$) داریم:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+-\cdots$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}\cdots \quad\rightarrow\quad \ln\left(1+z^2\right)=z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}+\cdots$$

حال می‌گوئیم:

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ldots\right)\left(z^2-\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{3}-\ldots\right)$$

ضریب جمله z^5 : $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}$

مثال : تابع $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\cos z-\cosh z}{z} & ;\ z\neq 0\\ 0 & ;\ z=0\end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبه ؟ = $f^{(13)}(0)$

حل :

$$\frac{\cos z-\cosh z}{z}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots-\frac{z^{14}}{14!}+\ldots\right)-\left(1+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^{14}}{14!}+\ldots\right)}{z}=\frac{-2z}{2!}-\ldots-\frac{2z^{13}}{14!}-\ldots$$

ملاحظه می‌شود ضریب z^{13} برابر $\frac{-2}{14!}$ است. یعنی:

$$\frac{f^{(13)}(0)}{13!}=-\frac{2}{14!}\quad\rightarrow\quad f^{(13)}(0)=-\frac{2}{14}$$

نوشتن بسط تیلور و لوران توابع گویا، معتبر در نواحی مختلف

دو بسط زیر که به سری‌های هندسی موسومند، تنها برای $|A|<1$ اعتبار دارند. لذا هرگاه شرط مذکور برقرار نباشد، مجاز به استفاده از آن‌ها نمی‌باشیم:

$$\frac{1}{1-A}=1+A+A^2+A^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$$

$$\frac{1}{1+A}=1-A+A^2-A^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A^n$$

✓ یک قرارداد و نکته

وقتی می‌گویند بسط تابع $f(z)$ را در ناحیه $\alpha < \left| z - z_0 \right| < \beta$ بنویسید (α می‌تواند صفر و β می‌تواند بی‌نهایت باشد)، منظور آن است که بسط تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 (برحسب توان‌های عبارت $\left(z - z_0 \right)$) نوشته شود که در ناحیه $\alpha < \left| z - z_0 \right| < \beta$ معتبر باشد.

می‌توان دید اگر لااقل یکی از نقاط تکین احتمالی تابع $f(z)$ در ناحیه $\left| z - z_0 \right| \le \alpha$ قرار گیرد (در حفره داخلی ناحیه $\alpha < \left| z - z_0 \right| < \beta$ یا مرز محذوف داخلی آن)، آنگاه در بسط نوشته شده قطعاً توان‌های منفی عبارت $\left(z - z_0 \right)$ نیز ظاهر می‌شود و اصطلاحاً جنس بسط لورانی خواهد شد و اگر هیچ کدام از نقاط تکین احتمالی $f(z)$ در ناحیه $\left| z - z_0 \right| \le \alpha$ قرار نگیرد (تمام تکین‌های احتمالی در ناحیه $\left| z - z_0 \right| \ge \beta$ واقع باشد)، آنگاه در بسط نوشته شده قطعاً هیچ توان منفی از عبارت $\left(z - z_0 \right)$ ظاهر نمی‌شود و اصطلاحاً جنس بسط تیلوری است.

مثال : برای تابع $f(z) = \dfrac{2z + 3}{z^2 + 3z - 4}$ انواع بسط‌ها حول نقطه $z_0 = 0$ را بنویسید.

حل : با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$f(z) = \frac{2z + 3}{(z-1)(z+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+4}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $z - 1$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{2z+3}{z+4} = A + \frac{B(z-1)}{z+4} \xrightarrow{z=1} A = 1$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $z + 4$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{2z+3}{z-1} = \frac{A(z+4)}{z-1} + B \xrightarrow{z=-4} B = 1$$

پس $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+4}$ می‌باشد.

باتوجه به نقاط تکین تابع فوق که $z = 1 , -4$ می‌باشد، سه نوع بسط برای تابع حول $z_0 = 0$ قابل بیان است که عبارتند از:

۱) معتبر در ناحیه $|z| < 1$ که هیچ‌کدام از نقاط تکین در آن نمی‌باشند، لذا بسط‌های $\dfrac{1}{z+4}$ و $\dfrac{1}{z-1}$ تیلوری و کل بسط $f(z)$ نیز تیلوری است.

۲) معتبر در ناحیه $1 < |z| < 4$ که روی مرز محذوف داخلی $\left(|z| = 1 \right)$، تکین $z = 1$ قرار دارد، لذا بسط $\dfrac{1}{z-1}$ لورانی و بسط $\dfrac{1}{z+4}$ تیلوری و کل بسط $f(z)$ نیز لورانی است.

۳) معتبر در ناحیه $|z| > 4$ که روی مرز محذوف $|z| = 4$، تکین $z = 4$ و داخل حفره میانی تکین $z = 1$ قرار دارد، لذا بسط‌های $\dfrac{1}{z+4}$ و $\dfrac{1}{z-1}$ لورانی و کل بسط $f(z)$ نیز لورانی است.

در ناحیه $1 > |z|$ داریم:

$$|z| < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$|z| < 1 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{z}{4}\right| < \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}}$$

در ناحیه $4 > |z| > 1$ داریم:

$$1 < |z| < 4 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} < \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$1 < |z| < 4 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} < \left|\frac{z}{4}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^{n+1}}$$

در ناحیه $4 < |z|$ داریم:

$$|z| > 4 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$|z| > 4 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{4}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{4}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{z^{n+1}}$$

انواع نقاط تکین

همان‌طوری‌که گفتیم اگر تابع مختلط $f(z)$ در تمام صفحه به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط، نقاط تکین این تابع مختلط می‌گوئیم.

نقاط تکین به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱) تکین‌های از نوع تنها که خود به دو گونه قطب و تکین اساسی دسته‌بندی می‌شوند.

۲) تکین‌های از نوع غیرتنها یا از نوع انباشته

اگر z_0 یک نقطهٔ تکین تابع $f(z)$ باشد، ولی در همسایگی محذوف این نقطه، تکین دیگری از این تابع وجود نداشته باشد، z_0 را تکین تنها برای تابع $f(z)$ می‌گویند. (اگر z_0 یک تکین تنها برای $f(z)$ باشد $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ بی‌نهایت خواهد شد)

اگر z_0 یک تکین تابع $f(z)$ باشد که از نوع تنها نیست، یکی از دو اتفاق زیر رخ داده است:

الف) یا $f(z)$ دارای یک بریدگی شاخه‌ای است که یک طیف به هم پیوسته‌ای از نقاط تکین را تشکیل داده‌اند و z_0 نیز یکی از این نقاط تکین می‌باشد. در چنین شرایطی طبیعی است در همسایگی z_0 نقطه تکین دیگری از تابع مورد نظر وجود دارد.

ب) یا $f(z)$ دارای بیشمار نقطه تکین است و موقعیت آن‌ها به‌گونه‌ای است که همگی در حال نزدیک و نزدیکتر شدن به z_0 می‌باشند (یعنی تمایل به انباشته شدن در z_0 دارند). و لذا این امکان وجود دارد که به ازاء هر مقدار کوچک ε نقطه تکینی مثل z_1 از تابع بیابیم که $\left| z_0 - z_1 \right| < \varepsilon$.

مثال : نقاط تکین توابع زیر را پیدا کرده و نوع آن‌ها را از حیث تنها یا غیرتنها، مشخص کنید:

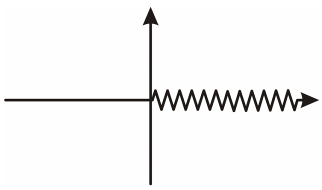
۱) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z^2 - z^3}\right)$

حل : نقاط تکین:

$$z^2 - z^3 = 0 \;\rightarrow\; z^2(1-z) = 0 \;\rightarrow\; z = 0 , 0 , 1$$

و همه تکین‌های مذکور از نوع تنها می‌باشند.

۲) $f(z) = \ln z \quad ; \quad 0 \le \theta < 2\pi$



حل : می‌دانیم $\ln z$ در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی شاخه‌ای‌اش که باتوجه به محدوده θ مشخص می‌شود، تحلیلی است. لذا در این مثال نقاط تکین مطابق شکل زیرند.

و البته تمامی تکین‌های مذکور از نوع غیرتنهایند.

۳) $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^z}$

حل : نقاط تکین:

$$1 + e^z = 0 \;\rightarrow\; e^z = -1 \;\rightarrow\; z = \ln(-1) \;\rightarrow\; z = \ln(1) + i(\pi + 2k\pi) = \pm i\pi , \pm 3i\pi , \pm 5i\pi$$

تابع مذکور بی‌شمار نقطه تکین دارد که البته همگی از نوع تنهایند.

۴) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \cos\dfrac{1}{z}}$

حل : نقاط تکین:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 1 - \cos\dfrac{1}{z} = 0 \;\rightarrow\; \cos\dfrac{1}{z} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{z} = 2k\pi \;\rightarrow\; z = \dfrac{1}{2k\pi} = \pm\dfrac{1}{2\pi} , \pm\dfrac{1}{4\pi} , \pm\dfrac{1}{6\pi} , \ldots \end{cases}$$

تابع مذکور دارای بیشمار نقطه تکین است که همگی از نوع تنهایند، به جز $z = 0$ که تکین از نوع انباشته (غیرتنها) است.

انواع تکین‌های تنها

اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد و بتوان mای یافت که $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ حاصلش صفر و بی‌نهایت نشود، z_0 را یک قطب مرتبه mام تابع مذکور گفته و اگر چنین mای موجود نباشد، z_0 را یک تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) تابع مورد نظر می‌گویند.

مثال : $z = 0$ قطب مرتبه چندم تابع $f(z) = \dfrac{1 - e^{z^2}}{z^3}$ می‌باشد؟

حل :

$$\lim_{z \to 0} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} 1 - e^{z^2} = 0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{z^2}}{z} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{z \to 0} \frac{-2ze^{z^2}}{1} = 0 \quad (\text{غ ق ق})$$

$$\lim_{z \to 0} z^1 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{z^2}}{z^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{z \to 0} \frac{-2ze^{z^2}}{2z} = -1 \neq 0 \,,\, \infty$$

یعنی $z = 0$ قطب مرتبه اول تابع مذکور است.

✓ معرفی بسط لوران یک تابع حول نقطه تکین تنهای آن

اگر $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد، حول این نقطه دارای بسط تیلور است به‌گونه‌ای که تابع را می‌توان به صورت یک سری توانی از $(z - z_0)$ نوشت به طوری که در آن فقط توان‌های صحیح نامنفی از عبارت $(z - z_0)$ پدید می‌آید.

اما اگر z_0 یک نقطه تکین تابع $f(z)$ باشد، امکان نوشتن بسط تیلور حول این نقطه وجود ندارد اما چنانچه z_0 یک تکین تنها برای این تابع باشد، می‌توان بسطی موسوم به بسط لوران تابع $f(z)$ را حول نقطه z_0 بیان نمود.ویژگی بارز این بسط آن است که در آن توان‌های منفی عبارت $(z - z_0)$ نیز پدید می‌آید.

از بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین تنهایی مانند z_0 دو نتیجه به‌دست می‌آید:

الف) ضریب جمله $\dfrac{1}{z - z_0}$ را مانده تابع در نقطه z_0 گفته و با $\text{Res}\Big|_{z_0}$ یا $C_{-1}\Big|_{z_0}$ نمایش می‌دهیم.

ب) اگر در این بسط بالاترین توان منفی عبارت $(z - z_0)$ قابل رویت باشد، یعنی z_0 یک قطب تابع $f(z)$ بوده و عدد این بالاترین توان منفی، مرتبه این قطب را نشان می دهد و اگر بالاترین توان منفی برای عبارت $(z - z_0)$ موجود نباشد، یعنی z_0 یک تکین اساسی تابع بوده است.

مثال : بسط توابع زیر را حول نقطه $z = 0$ نوشته و نتایج حاصله را بیان کنید.

۱) $f(z) = z^5 e^{-\frac{1}{z^2}}$

حل :

$$f(z) = z^5 \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^4}{4!} + \dots \right) = z^5 - z^3 + \frac{z}{2!} - \frac{1}{z3!} + \frac{1}{z^3 4!} - \dots$$

نتایج:

۱) در بسط مذکور توان‌های منفی عبارت z موجود است لذا چنین بسطی لورانی است و این تأکید می‌کند $z=0$ نقطه تکین تابع است.

۲) بالاترین توان منفی در این بسط قابل رویت نیست لذا $z=0$ تکین اساسی است.

۳) $-\dfrac{1}{3!} = \operatorname{Res}\Big|_{z=0} =$ ضریب جمله $\dfrac{1}{z}$

$$۲)\ f(z)=\frac{z-\sinh z}{z^3}$$

حل :

$$f(z)=\frac{z-\left(z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\dfrac{z^7}{7!}+\ldots\right)}{z^3}=-\left(\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}+\ldots\right)$$

نتایج:

در بسط مذکور هیچ توان منفی از عبارت z موجود نیست لذا جنس بسط از نوع تیلوری است و این تصریح می‌کند $z=0$ نقطه تکین تابع به احتساب نمی‌آید و به عبارتی تابع در $z=0$ تحلیلی است.

$$۳)\ f(z)=\frac{\cos z}{e^z-1}$$

حل :

$$f(z)=\frac{1-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{24}-\ldots}{\left(\cancel{1}+z+\dfrac{z^2}{2}+\ldots\right)-\cancel{1}}$$

با عمل تقسیم داریم:

$$\begin{array}{l|l} 1-\dfrac{z^2}{2}+\ldots & z+\dfrac{z^2}{2}+\ldots \\ \cline{2-2} 1+\dfrac{z}{2} & \dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\cdots \\ \hline -\dfrac{z}{2}-\dfrac{z}{2} & \\ -\dfrac{z}{2}-\dfrac{z^2}{4} & \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

نتایج: جمله بالاترین توان منفی z^{-1} است لذا $z=0$ نقطه تکین از نوع قطب مرتبه اول است و البته :

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=1$$: ضریب جمله $\dfrac{1}{z}$

چند نکته در تعیین نوع نقاط تکین

۱) تابع $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ را در نظر بگرید که در آن $Q(z)$و $P(z)$ همه‌جا تحلیلی‌اند. اگر z_0 یک صفر مرتبه mام تابع $P(z)$ و z_0 یک صفر مرتبه nام تابع $Q(z)$ باشد، می‌توان گفت:

الف) اگر $m>n$ باشد، آنگاه z_0 یک صفر مرتبه $(m-n)$اُم تابع $f(z)$ است.

ب) اگر $m<n$ باشد، آنگاه z_0 یک قطب مرتبه $(n-m)$اُم تابع $f(z)$ است.

ج) اگر $m=n$ باشد، آنگاه z_0 یک تکین برداشتنی (قطب مرتبه صفرم) تابع $f(z)$ است. (مهم است بدانیم در این حالت z_0 نقطه تکین تابع به احتساب نمی‌آید و به تعبیری تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی بوده و حول این نقطه دارای بسط تیلور می‌باشد.)

✓ **یادآوری:**

۱) $z=\alpha$ را یک صفر مرتبه kام تابع $h(z)$ می‌گویند، هرگاه :

$$h(\alpha)=0 \quad , \quad h'(\alpha)=0 \quad ,\ldots, \quad h^{(k-1)}(\alpha)=0 \quad , \quad h^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

۲) اگر $f(z)$ همه‌جا تحلیلی باشد:

الف) توابع $e^{\frac{1}{f(z)}}, \cos\left(\dfrac{1}{f(z)}\right), \sin\left(\dfrac{1}{f(z)}\right), \cosh\left(\dfrac{1}{f(z)}\right), \sinh\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$ در ریشه‌های معادله $f(z)=0$ دارای تکین اساسی می‌باشند.

ب) توابع:

$$\frac{1}{L-\sin\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)} \quad , \quad \frac{1}{L-\sinh\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)}$$

$$\frac{1}{L-\cos\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)} \quad , \quad \frac{1}{L-\cosh\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)}$$

$$\frac{1}{h-e^{\frac{1}{f(z)}}}$$

(که L عدد ثابت دلخواه و h عدد ثابت دلخواه مخالف صفر می باشند)

در ریشه‌های معادله $f(z)=0$ دارای تکین از نوع انباشته می‌باشند.

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{z^3\left(1-e^z\right)}{\left(1-\cos z\right)^5}$ مفروض است. $z=0$ چگونه نقطه‌ای برای این تابع است؟

حل : $\left(1-\cos z\right)\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \sin z\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \cos z\Big|_{z=0}=1\neq 0$

$z=0$ برای $1-\cos z$ صفر مرتبه دوم است. لذا برای $\left(1-\cos z\right)^5$ صفر مرتبه دهم است.

$\left(1-e^z\right)\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \left(-e^z\right)\Big|_{z=0}=-1\neq 0$

$z=0$ برای $1-e^z$ صفر مرتبه اول است. لذا برای $z^3\left(1-e^z\right)$ صفر مرتبه چهارم است.

و لذا برای کل $f(z)$، $z=0$ قطب مرتبه $\left(10-4=6\right)$ام است.

مثال : در هر کدام از موارد زیر $z=0$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) $f(z)=z^3+4z+\dfrac{1}{z^2+1}$

$z=0$ یک نقطه عادی برای تابع $f(z)$ است.

۲) $f(z)=z^5+4z^3+z^2$

$z=0$ صفر مرتبه دوم برای تابع $f(z)$ است.

۳) $f(z)=z^7+z^4+\dfrac{3}{z^3}+\dfrac{5}{z^9}$

$z=0$ قطب مرتبه نهم تابع است.

۴) $f(z)=\dfrac{1}{5-\dfrac{3}{z}}$

$z=0$ صفر مرتبه اول است نه تکین آن. زیرا : $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{5-\dfrac{3}{z}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

۵) $f(z)=\dfrac{z}{5z-3}$

به وضوح می‌بینیم $z=0$ یک صفر مرتبه اول تابع است. (البته $z=\dfrac{3}{5}$ قطب مرتبه اول تابع است)

۶) $f(z)=\left(z^7+6z\right)\sin\dfrac{1}{z}$

$z=0$ تکین اساسی برای $\sin\dfrac{1}{z}$ و البته صفر مرتبه دوم برای $\left(z^7+6z^2\right)$ می باشد و در کل تکین اساسی محسوب می شود.

۷) $f(z)=\left(z^4+\dfrac{1}{z^5}\right)\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$

$z=0$ تکین اساسی برای $\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ و قطب مرتبه پنجم برای $\left(z^4+\dfrac{1}{z^5}\right)$ می باشد و در کل تکین اساسی محسوب می شود.

۸) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

$z = 0$ تکین اساسی برای $e^{\frac{1}{z}}$ و البته قطب مرتبه هشتم برای $\frac{1}{z^8}$ و تکین انباشته برای $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ می باشد و در کل تکین انباشته‌ای محسوب می شود.

مثال : برای تابع $f(z) = \frac{\left(z^2 - 4\right) e^{\frac{1}{z-2}}}{\sin^6 (z+2)}$ نقاط $z = \pm 2$ چگونه نقاطی هستند.

حل : $z = 2$ تکین اساسی برای تابع $e^{\frac{1}{z-2}}$ می باشد .

$z = -2$ قطب مرتبه پنجم است .

مثال : برای تابع $f(z) = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)} + e^{\frac{2}{z}}$، $z = 0 , 1$ چه نقاطی هستند.

حل : $z = 1$ تکین از نوع انباشته می باشد .

$z = 0$ تکین اساسی می باشد .

✓ محاسبه مانده در نقاط تکین از نوع قطب

راه‌حل همیشگی برای محاسبه مانده در نقاط تکین، استفاده از بسط لوران تابع حول آن نقطه تکین می‌باشد. ولی اگر نقطه تکین مذکور از نوع قطب باشد، راه دیگری نیز موجود است.

هرگاه z_0 یک قطب مرتبه mاُم تابع $f(z)$ باشد، داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{\left(z - z_0\right)^m f(z)\right\}$$

به خصوص اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z - z_0\right) f(z)$$

توجه ۱ : هرگاه z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد، و مضافاً $P\left(z_0\right)$ مخالف صفر باشد (یعنی z_0 یک صفر مرتبه اول تابع $Q(z)$ می‌باشد)، آنگاه داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0} = \frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z_0} \qquad (*)$$

توجه ۲ : اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد $\left(f(-z)=f(z)\right)$، آنگاه در بسط این تابع حول $z=0$ فقط توان‌های زوج (مثبت یا منفی) عبارت z ظاهر می‌شود.

لذا اگر $z=0$ یک نقطه تکین تنها برای تابع زوج $f(z)$ باشد (قطب یا اساسی) در این نقطه مانده تابع که همان ضریب جمله $\frac{1}{z}$ می‌باشد صفر خواهد بود.

مثال : مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(3z-1)^5}$ را در نقطه تکینش بیابید.

حل : تنها نقطه تکین $z=\frac{1}{3}$ است که قطب مرتبه پنجم می‌باشد و داریم:

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=\frac{1}{3}}=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{1}{(5-1)!}\frac{d^4}{dz^4}\left\{\left(z-\frac{1}{3}\right)^5\times\frac{e^{2z}}{(3z-1)^5}\right\}=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\left\{\frac{e^{2z}}{3^5}\right\}$$

$$=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{3^5}\left(2^4\right)e^{2z}\Big|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{2^4e^{\frac{2}{3}}}{(4!)\left(3^5\right)}$$

مثال : مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin^2 z}$ را در نقطه $z=0$ پیدا کنید.

حل : $z=0$ برای e^z-1 صفر مرتبه اول و برای $\sin^2 z$ صفر مرتبه دوم است . پس در کل $z=0$ قطب مرتبه اول است و طبق فرمول محاسبه مانده برای قطب مرتبه اول داریم :

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=0}=\lim_{z\to0}z\frac{e^z-1}{\sin^2 z}=\lim_{z\to0}z\frac{e^z-1}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{z\to0}\frac{e^z}{1}=1$$

قضیه مانده‌ها در محاسبه انتگرال‌ها مختلط

هرگاه C یک منحنی بسته طی شده در جهت مثلثاتی باشد و $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقاطی خاص تحلیلی باشد و هیچکدام از تکین‌های تابع $f(z)$ روی مرز C قرار نگیرد و مضافاً تمام تکین‌های تابع $f(z)$ که احتمالاً داخل ناحیه محصور به منحنی بسته C هستند، از نوع تکین تنها باشند (قطب یا اساسی)، آنگاه داریم:

$$\int f(z)\,dz=2\pi i\ \{\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z) \text{ در نقاط تکین واقع در داخل مرز بسته } C\}$$

توجه: وقتی مرز انتگرال‌گیری بسته نباشد و یا تابع زیر علامت انتگرال هیچ جایی تحلیلی نباشد، استفاده مستقیم از روش مانده ها تعطیل است. اما به خصوص در مواردی که مرز انتگرال‌گیری $|z|=a$ می‌باشد، چنانچه در تابع زیر علامت انتگرال جملاتی مانند $\operatorname{Im} z$ و $\operatorname{Re} z$ و $\bar{z}$ و $|z|$ داشتیم (که هیچ جایی تحلیلی نمی‌باشند)، می‌توان باتوجه به روابط $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ و $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ و این حقیقت که $\bar{z}=\dfrac{\bar{z}z}{z}=\dfrac{|z|^2}{z}$ از این موضوع که روی $|z|=a$ هستیم، از شر جملات گفته شده خلاص شد و مساله را برای حل با روش مانده‌ها آماده کرد.

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c \frac{\sin \pi z}{(z-1)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)} dz$ که در آن c دایره $|z| = 2$ می‌باشد.

حل : نقاط تکین تابع عبارتند از:

$z = \pm \frac{1}{2}$ که هر دو قطب مرتبه اولند

که هر دو داخل مرز c واقع‌اند.

و البته $z = 1$ که صورت و مخرج را یکبار صفر می‌کند، تکین تابع به حساب نمی‌آید.

$$\text{Res}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} \overset{*}{=} \frac{\sin \pi z}{(1)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + (z-1)(2z)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Res}\Big|_{z=\frac{1}{2}} \overset{*}{=} \frac{\sin \pi z}{(1)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + (z-1)(2z)}\Bigg|_{z=\frac{+1}{2}} = -2$$

پس در کل:

$$I = 2\pi i\left(-2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{-16\pi i}{3}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\, e^{\frac{1}{z}}\, dz$.

حل : تنها نقطه تکین $z = 0$ و از نوع اساسی است و البته $z = 0$ داخل $|z| = 1$ است. برای محاسبه مانده در $z = 0$ باید بسط لوران حول نقطه $z = 0$ را نوشت. (دقت داریم اگر نقطه تکین اساسی باشد، برای محاسبه مانده از بسط لوران استفاده می‌کنیم)

$$f(z) = z^2\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \frac{1}{z^7 7!} + \dots\right\}\left\{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots\right\} = \left\{z - \frac{1}{z3!} + \frac{1}{z^3 5!} - \dots\right\}\left\{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots\right\}$$

پس در کل ضریب جمله $\frac{1}{z}$ که مانده تابع در $z = 0$ است، چنین می‌باشد:

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

پس:

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - z} dz$ که در آن c بیضی $|z + i| + |z + 2| = \frac{10}{3}$ می‌باشد.

حل : نقاط تکین عبارتند از:

$z = 0$ تکین اساسی و داخل مرز c است.

زیرا : $|0 + i| + |0 + 2| = 1 + 2 = 3 < \frac{10}{3}$

$z = 1$ قطب مرتبه اول و خارج مرز c است. زیرا:

$$|1 + i| + |1 + 2| = \sqrt{2} + 3 > \frac{10}{3}$$

برای محاسبه مانده در $z=0$ باید بسط لوران حول $z=0$ نوشته شود:

$$e^{\frac{1}{z}}\,\frac{1}{1-z}=\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\,2!}+\frac{1}{z^3\,3!}+\dots\right\}\left\{1+z+z^2+z^3+z^4+\dots\right\}$$

$$\frac{1}{z}\text{ ضریب جمله : }\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots=e-1$$

پس:

$$I=2\pi i(e-1)$$

دقت داریم:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\quad\rightarrow\quad e^1-1=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$$

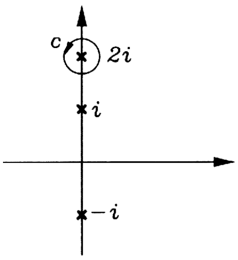
مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_c \frac{\ln(z^2+1)}{(z-2i)^3}dz$ که در آن c دایره $|z-2i|=\frac{1}{3}$ می‌باشد.

حل : تابع $\ln(z^2+1)$ در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی‌های شاخه‌ای اش تحلیلی می‌باشد و از آن‌جا که نقاط شاخه‌ای این تابع عبارتند از:

$$z^2+1=0\quad\rightarrow\quad z=\pm i$$

که بیرون دایره $|z-2i|=\frac{1}{3}$ می‌باشند. بریدگی شاخه‌ای را به گونه‌ای دلخواه که البته در خارج دایره c قرار بگیرد، انتخاب می‌کنیم (به تعبیری $\ln(z^2+1)$ در این مسئله تکینی در ناحیه $|z-2i|=\frac{1}{3}$ ندارد).

تنها نقطه تکین که داخل مرز c است، $z=2i$ می‌باشد که قطب مرتبه سوم بوده و داریم:

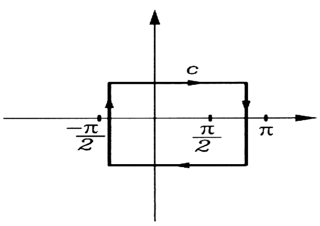


$$\operatorname{Res}\Big|_{z=2i}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-2i)^3\frac{\ln(z^2+1)}{(z-2i)^3}\right\}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2}\left(\frac{2(z^2+1)-4z^2}{(z^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}=\frac{5}{9}$$

در نهایت:

$$I=2\pi i\times\frac{5}{9}$$



مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_c \frac{\tan z}{z^3}dz$ که در آن c منحنی نشان داده شده در شکل روبرو است.

حل : نقاط تکین عبارتند از:

$$\begin{cases} z=0 & \text{قطب مرتبه دوم}\\ \cos z=0\ \rightarrow\ z=k\pi+\frac{\pi}{2}:\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\dots & \text{قطب‌های مرتبه اول}\end{cases}$$

تنها $z=0,\frac{\pi}{2}$ داخل مرز c می‌باشند.

چون تابع $f(z)$ تابعی زوج است لذا:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=0$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} \overset{*}{=} \frac{\sin z}{3z^2\cos z - z^3\sin z}\Bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{8}{\pi^3}$$

در نهایت:

$$I=-2\pi i\left(0+\frac{-8}{\pi^3}\right)=\frac{16i}{\pi^2}$$

علامت منفی به خاطر آن که جهت c در خلاف جهت مثلثاتی داده شده است.

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_{|z|=2}\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)dz$ ؟

حل : تنها نقطه تکین $z=-1$ است که تکین اساسی بوده و داخل مرز انتگرال‌گیری نیز واقع است. برای نوشتن بسط لوران تابع حول نقطه $z=-1$ می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\sin\left(\frac{(z+1)-2}{z+1}\right)=\sin\left(1-\frac{2}{z+1}\right)=\sin 1\cos\left(\frac{2}{z+1}\right)-\cos 1\sin\frac{2}{z+1}$$

$$=\sin 1\left\{1-\frac{\left(\frac{2}{z+1}\right)^2}{2!}+\dots\right\}-\cos 1\left\{\frac{2}{z+1}-\dots\right\}$$

بنابراین مشاهده می‌شود ضریب جمله $\frac{1}{z+1}$ برابر است با:

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}=-2\cos 1$$

پس:

$$I=2\pi i(-2\cos 1)=-4\pi i\cos 1$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_{|z|=3} z^2 \operatorname{Im} z\,dz$.

حل : از آن جایی که $\operatorname{Im} z$ هیچ جایی تحلیلی نیست ،فعلاً استفاده از روش مانده‌ها بی‌معنا است. اما می‌توان نوشت:

$$I=\int_{|z|=3} z^2\,\frac{z-\bar{z}}{2i}\,dz=\int_{|z|=3} z^2\,\frac{z-\frac{z\bar{z}}{z}}{2i}\,dz=\frac{1}{2i}\int_{|z|=3}\left(z^3-9z\right)dz=0$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{\bar{z} - 2i} dz$.

حل : برای این‌که مسئله را از وجود ترم $\bar{z}$ خلاص کنیم، می‌نویسیم:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{\frac{z\bar{z}}{z} - 2i} dz = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{\frac{1}{z} - 2i} dz = \int_{|z|=1} \frac{z \sin z}{1 - 2iz} dz$$

حال می‌توانیم از روش مانده‌ها استفاده کنیم نقاط تکین عبارتند از :

$$1 - 2iz = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$ (قطب مرتبه اول و داخل مرز $|z| = 1$ می‌باشد)

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-\frac{i}{2}} \overset{*}{=} \frac{z \sin z}{-2i}\Big|_{z=-\frac{i}{2}} = \frac{-\frac{i}{2}\sin\left(-\frac{i}{2}\right)}{-2i} = \frac{\sin\left(-\frac{i}{2}\right)}{4} = -\frac{\sin\frac{i}{2}}{4} = \frac{-i\sinh\left(\frac{1}{2}\right)}{4}$$

در نهایت:

$$I = 2\pi i \left(\frac{-i \sin h\left(\frac{1}{2}\right)}{4} \right)$$

محاسبه برخی انتگرال‌ها با روش مانده‌ها

۱) در محاسبه انتگرال‌هایی به‌صورت $I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$ (توابع کسری از $\sin\theta, \cos\theta$)، با توجه به روابط $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ چنانچه فرض کنیم $z = e^{i\theta}$ که نتیجه می‌دهد: $d\theta = \frac{dz}{iz} \leftarrow dz = ie^{i\theta} d\theta$ داریم $\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ و لذا می‌توان مساله را به یک انتگرال مختلط که باید روی دایره $|z| = 1$ محاسبه شود، تبدیل نمود.

۲) در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ که در آن $Q(x)$ و $P(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند که درجه $Q(x)$ لااقل دو واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و مضافاً $Q(x)$ هیچ صفر حقیقی ندارد، می‌توان نشان داد:

$$I = 2\pi i \{\text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ در نقاط تکین واقع بر نیم صفحه فوقانی}\}$$

۳) در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ که در آن α عددی ثابت و مثبت است و $Q(x)$ و $P(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند به طوری‌که درجه $Q(x)$ لااقل یک واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و مضافاً $Q(x)$ یا هیچ صفر حقیقی ندارد و یا اگر دارد صفری ساده و منطبق بر یکی از صفرهای $\cos\alpha x$ یا $\sin\alpha x$ می‌باشد، می‌توان نشان داد:

$$I = 2\pi i \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع مانده‌های تابع } e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)} \\ \text{در نقاط تکین واقع بر نیم صفحه فوقانی} \end{array} \right\} + \pi i \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع مانده‌های تابع } e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)} \\ \text{در نقاط تکین روی محور حقیقی} \end{array} \right\}$$

توجه کنید داریم $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$. لذا طبیعی است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos\alpha x \, dx = \mathrm{Re}(I) \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin\alpha x \, dx = \mathrm{Im}(I)$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

حل : باتوجه به بحث صورت گرفته داریم:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{4z+z^2+1}$$

نقطه تکین:

$$z^2+4z+1=0 \quad \rightarrow \quad z=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}$$

تنها $z=-2+\sqrt{3}$ داخل $|z|=1$ است و داریم:

$$\mathrm{Res}\,\frac{1}{i}\,\frac{2}{z^2+4z+1}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} \overset{*}{=} \frac{1}{i}\,\frac{2}{2z+4}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{1}{i}\,\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

پس در نهایت:

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,.\,e^{-i(n\theta-\sin\theta)}\,d\theta \qquad n\in N$$

حل : داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}\,e^{-in\theta}\,d\theta$$

با فرض $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$I = \int_{|z|=1} e^z\,(z)^{-n}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz$$

تنها نقطه تکین $z=0$ است که قطب مرتبه $n+1$ام است و داخل دایره می‌باشد.

$$\mathrm{Res}\,\frac{e^z}{z^{n+1}}\bigg|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{n+1}\,\frac{e^z}{z^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}\,e^z\bigg|_{z=0} = \frac{1}{n!} \quad \rightarrow \quad I = \frac{1}{i}\,2\pi i\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{2\pi}{n!}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

حل : نقاط تکین عبارتند از :

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}\quad\rightarrow\quad z=\pm 2i$$ (هر دو قطب مرتبه دوم‌اند)

فقط $z=2i$ در نیم صفحه فوقانی واقع است و مانده چنین محاسبه می شود:

$$\operatorname{Res}\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}\Bigg|_{z=2i}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-2i)^2\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}\right\}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z+2i)^{-2}\right)$$

$$=-2(z+2i)^{-3}\Big|_{z=2i}=-2\left(\frac{1}{4i}\right)^3=\frac{-2}{64(-i)}$$

در نهایت:

$$I=2\pi i\left(\frac{-2}{64(-i)}\right)=\frac{\pi}{16}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+2x+2}\,dx$.

حل :

$$e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)}=e^{2iz}\frac{1}{z^2+2z+2}$$

نقطه تکین:

$$z^2+2z+2=0\quad\rightarrow\quad z=-1\pm i$$ (هر دو قطب مرتبه اولند)

$z=-1+i$ در نیم صفحه فوقانی است و $z=-1-i$ در نیم صفحه تحتانی است.

$$\operatorname{Res}\frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}\Bigg|_{z=-1+i}\overset{*}{=}\frac{e^{i2z}}{2z+2}\Bigg|_{z=-1+i}=\frac{e^{2i(-1+i)}}{2i}=\frac{e^{-2i}\,e^{-2}}{2i}$$

حال می‌گوئیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}}{x^2+2x+2}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-2i}\,e^{-2}}{2i}\right)=\frac{\pi}{e^2}\left(\cos 2-i\sin 2\right)$$

حال می‌گوئیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+2x+2}\,dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{e^2}\cos 2$$

و البته :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx=\operatorname{Im}(I)=-\frac{\pi}{e^2}\sin 2$$

مثال : مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)} dx$.

حل :

$$e^{i\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} = e^{iz} \frac{\sin z}{z\left(z^2+1\right)} \quad \rightarrow \quad z=0\,,\, z=\pm i$$

همگی قطب مرتبه اولند و البته $z=0$ واقع بر محور حقیقی و $z=i$ واقع بر نیم‌صفحه فوقانی است.

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}\bigg|_{z=0} \overset{*}{=} \frac{e^{iz}}{3z^2+1}\bigg|_{z=0} = 1$$

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}\bigg|_{z=i} \overset{*}{=} \frac{e^{iz}}{3z^2+1}\bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

حال می‌گوئیم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{-2}\right) + \pi i(1) = \frac{-\pi i}{e} + \pi i$$

حال می‌توان گفت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)} dx = \operatorname{Im}(I) = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

تعاریف اولیه معادلات با مشتقات جزئی

- یک معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع و مشتقات آن تابع نسبت به متغیر(های) موجود و خود متغیر(ها) را نشان می‌دهد.
- اگر تابع مورد بحث فقط از یک متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل از نوع معمولی "ODE" و اگر تابع مورد بحث از چند متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل از نوع پاره‌ای (مشتقات جزئی) "PDE" نامیده می‌شود.
- معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گویند، هرگاه شامل هیچ جملهٔ غیرخطی از تابع و یا مشتقات تابع نباشد و معادله از نوع خطی را همگن می‌گویند، هرگاه تمام جملات معادله شامل تابع یا یکی از مشتقات آن باشد.
- بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌گویند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

معادله دیفرانسیل پاره‌ای ـ مرتبه دو ـ غیرخطی

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y=0$$

معادله دیفرانسیل پاره‌ای ـ مرتبه دو ـ خطی ـ غیرهمگن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3-\frac{\partial u}{\partial x}+u=0$$

معادله دیفرانسیل پاره‌ای ـ مرتبه اول ـ غیرخطی

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+xy=0$$

بازنویسی یک معادله با «تغییر در تابع» یا «تغییر در متغیر»

اگر بخواهیم یک معادله را تحت فرض‌هایی خاص بازنویسی کنیم، باید مشتقات موجود در مساله را باتوجه به فرض‌های مذکور بازنویسی و در داخل معادله اصلی قرار دهیم.

مثال : با تغییر متغیرهای $v=x$ و $u=x+y$ معادله $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$ به چه معادله ای تبدیل می‌شود؟

حل : با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای داریم:

$$z_x=z_u\,.\,u_x+z_v\,.\,v_x=z_u(1)+z_v(1)$$

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z_u+z_v\right)=\left(z_{uu}\,.\,u_x+z_{uv}\,.\,v_x\right)+\left(z_{vu}\,.\,u_x+z_{vv}\,.\,v_x\right)$$

$$=z_{uu}(1)+z_{uv}(1)+z_{vu}(1)+z_{vv}(1)=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}$$

$$z_y=z_u\,.\,u_y+z_v\,.\,v_y=z_u(1)+z_v(0)=z_u$$

$$z_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(z_u\right)=z_{uu}\,.\,u_y+z_{uv}\,.\,v_y=z_{uu}(1)+z_{uv}(0)=z_{uu}$$

$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z_u\right)=z_{uu}\,.\,u_x+z_{uv}\,.\,v_x=z_{uu}(1)+z_{uv}(1)=z_{uu}+z_{uv}$$

با قراردادن این عبارات در معادله داده شده به‌دست می‌آید:

$$\left(z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}\right)-2\left(z_{uu}+z_{uv}\right)+z_{uu}=0\quad\rightarrow\quad z_{vv}=0$$

مثال : معادله روبرو را در نظر بگیرید: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$

اگر این معادله را با فرض $z = e^{x+y} . u(x , y)$ بازنویسی کنیم، به چه معادله‌ای برای u می‌رسیم؟

حل :

$$z = e^{x+y} . u \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} . u + e^{x+y} . u_x \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} . u + e^{x+y} . u_y \end{cases}$$

اگر از معادله اول نسبت به y مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = e^{x+y} . u + e^{x+y} . u_y + e^{x+y} . u_x + e^{x+y} u_{xy}$$

حال این عبارات را در معادله اصلی می‌گذاریم (از e^{x+y} فاکتور می‌گیریم) :

$$e^{x+y} \left\{ \left(u + u_y + u_x + u_{xy} \right) - \left(u + u_x \right) - \left(u + u_y \right) + u \right\} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{xy} = 0$$

حذف تابع اختیاری

اگر z تابعی از دو متغیر مستقل x , y باشد، و داشته باشیم:

$$F\left(u(x , y , z) , v(x , y , z) \right) = 0$$

معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z از طریق $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$ به‌دست می‌آید.

مثال : اگر $f(x - z) + g(yz) = 0$ باشد معادله حاکم بر $z(x , y)$ کدام است؟

حل : با نوشتن رابطه داده شده به صورت $F(x - z , yz) = 0$، داریم:

$$x - z = u \qquad , \qquad yz = v$$

و لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 - z_x & - z_y \\ y\, z_x & z + y\, z_y \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; z + yz_y - z_x z - z_x yz_y + yz_x z_y = 0 \;\rightarrow\; zz_x - yz_y = z$$

روش لاگرانژ در حل معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی

معادله $P(x , y , z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x , y , z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x , y , z)$ را در نظر بگیرید.

برای یافتن جواب این معادله، دستگاه زیر را که به دستگاه لاگرانژ موسوم است را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{P(x , y , z)} = \frac{dy}{Q(x , y , z)} = \frac{dz}{R(x , y , z)}$$

با حل دو معادله مستقل این دستگاه، دو جواب به صورت $u(x , y , z) = C_1$ و $v(x , y , z) = C_2$ به‌دست می‌آوریم.

نشان داده می‌شود جواب عمومی معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$F\left(u(x , y , z) , v(x , y , z) \right) = 0$$

مثال : جواب عمومی معادله $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$ کدام است؟

حل : معادله با مشتقات جزئی شبه‌خطی مرتبه اول و دستگاه لاگرانژ به صورت $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-1}=\dfrac{dz}{yz}$ می‌باشد و داریم:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-1} \quad\rightarrow\quad \ln x=-y+C_1 \quad\rightarrow\quad y+\ln x=C_1$$

$$\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{yz} \quad\rightarrow\quad y\,dy=-\frac{dz}{z}\rightarrow\frac{y^2}{2}=-\ln z+C_2 \quad\rightarrow\quad \frac{y^2}{2}+\ln z=C_2$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$F\left(y+\ln x\,,\,\frac{y^2}{2}+\ln z\right)=0$$

دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم شبه خطی و یافتن فرم کانونیک آن‌ها

معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$au_{xx}+2bu_{xy}+Cu_{yy}+F\left(x\,,y\,,u\,,u_x\,,u_y\right)=0$$

که در آن $a\,,b\,,c$ می‌توانند توابعی از $x\,,y$ باشند.

با فرض $\Delta=b^2-ac$ می‌گوئیم:

- اگر $\Delta>0$ باشد، معادله از نوع هذلولیگون است.
- اگر $\Delta=0$ باشد، معادله از نوع سهمیگون است.
- اگر $\Delta<0$ باشد، معادله از نوع بیضیگون است.

یافتن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک

برای یافتن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک، معادله مشخصه‌ای به صورت $a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)+c=0$ تشکیل می‌دهیم.

این معادله برای $\dfrac{dy}{dx}$ مثل یک معادله درجه دوم است که با حل آن، دو جواب حقیقی (اگر $\Delta>0$)، یک جواب مضاعف (اگر $\Delta=0$)، دو جواب مختلط (اگر $\Delta<0$) به‌دست می‌آید.

با حل معادلات دیفرانسیل حاصله، تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک به‌دست می‌آیند.

(دقت کنید اگر معادله از نوع سهمیگون باشد یکی از تغییر متغیرهای مورد نیاز به فرم دلخواه انتخاب می‌گردد).

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید.

$$\left(1-k\right)u_{xx}+2ku_{xy}-3u_y+2u_{yy}=0$$

ثابت k را طوری تعیین کنید که معادله از نوع هذلولیگون باشد.

حل : در این مساله داریم:

$$a=(1-k) \quad , \quad 2b=2k \quad , \quad C=2$$

$$\Delta=b^2-ac=k^2-(1-k)(2)=k^2+2k-2$$

برای تعیین علامت Δ می‌نویسیم:

$$k^2+2k-2=0 \quad \rightarrow \quad k=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$$

k		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$	
Δ	+	0	−	0	+

پس برای هذلولیگون بودن معادله کافی است:

$$\Delta>0 \quad \rightarrow \quad k<-1-\sqrt{3} \quad \text{یا} \quad k>-1+\sqrt{3}$$

مثال : تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک در مسئله زیر چیست؟

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(y+x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

حل : معادله مشخصه:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y+x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+x=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-1 \\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{-x}{y} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=-1 \quad \rightarrow \quad dy=-dx \quad \xrightarrow{\int} \quad y=-x+c_1 \quad \rightarrow \quad y+x=c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y} \quad \rightarrow \quad y\,dy=-x\,dx \quad \xrightarrow{\int} \quad \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c_2 \quad \rightarrow \quad y^2+x^2=2c_2=k$$

لذا تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم استاندارد عبارتند از:

$$\begin{cases} u=y+x \\ v=y^2+x^2 \end{cases}$$

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگرید.

$$e^{2y}u_{xx}+x\,e^{(x+y)}u_{xy}-3yu_x+e^{2x}u_{yy}=0$$

روی طبیعت این معادله از حیث سهمیگون، بیضیگون، هذلولی‌گون در قسمت‌های مختلف صفحه اظهار نظر کنید.

$$a=e^{2y} \quad , \quad 2b=x\,e^{(x+y)} \quad , \quad c=e^{2x}$$

$$\Delta=b^2-ac=\left(\frac{x}{2}e^{x+y}\right)^2-\left(e^{2y}\right)\left(e^{2x}\right)=\frac{x^2}{4}e^{2x+2y}-e^{2x+2y}=e^{2x+2y}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)$$

e^{2x+2y} (همواره مثبت است)

پس:

جایی‌که $\Delta>0$ است، یعنی $\frac{x^2}{4}>1 \quad \rightarrow \quad x>2$ یا $x<-2$، معادله از نوع هذلولی‌گون است.

جایی‌که $\Delta=0$ است، یعنی $\frac{x^2}{4}=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm 2$ ، معادله از نوع سهمیگون است.

جایی‌که $\Delta<0$ است، یعنی $\frac{x^2}{4}<1 \quad \rightarrow \quad -2<x<2$، معادله از نوع بیضیگون است.

معادلات با مشتقات جزئی همگن با ضرایب ثابت

فرض کنید معادله با مشتقات جزئی همگن با ضرایب ثابتی روی تابع دو متغیره $u(x,y)$ داده شده باشد. با تعریف اپراتورهای:

$$D=\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad D^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \quad \ldots$$

$$D'=\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad D'^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad \ldots$$

فرم اپراتوری معادله را نوشته و آن را به صورت حاصلضرب عوامل درجه اول از $D\,,\,D'$ تجزیه می‌کنیم.

برای هر عامل $aD+bD'+c$ پایه جوابی به صورت روبرو خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e^{-\frac{c}{a}x}\,\varphi(ay-bx) & ;a\neq 0 \\ \text{یا} & \\ e^{-\frac{c}{b}y}\,\varphi(ay-bx) & ;b\neq 0 \end{cases}$$

و برای تکرار عامل $aD+bD'+c$ پایه‌های جوابی به صورت روبرو خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x\,e^{-\frac{c}{a}x}\,\psi(ay-bx) \\ \text{یا} \\ y\,e^{-\frac{c}{b}y}\,\psi(ay-bx) \end{cases}$$

مثال : جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}+4u=0$

حل :

$$F(D,D')=D+3D'+4 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &u(x,y)=e^{-\frac{4}{1}x}\,\varphi(1y-3x) \\ \text{یا}\quad &u(x,y)=e^{-\frac{4}{3}y}\,.\,\varphi(1y-3x) \end{aligned}$$

۲) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

حل :

$$F(D,D')=D^2+2DD'-3D'^2=(D-D')(D+3D') \quad \rightarrow \quad u(x,y)=\varphi(y+x)+\psi(y-3x)$$

۳) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

حل :

$$F(D,D')=4D^2+12\,DD'+9D'^2=(2D+3D')^2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &u(x,y)=\varphi(2y-3x)+x\psi(2y-3x) \\ \text{یا}\quad &u(x,y)=\varphi(2y-3x)+y\psi(2y-3x) \end{aligned}$$

همگن کردن معادله و شرایط مرزی آن

معمولاً علاقه‌مندیم یک معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن را با فرض‌هایی مناسب، همگن (بدون طرف ثانی) نمائیم.

مثال : مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = x \\ u(0,t) = 1 \quad , \quad u_x(0,t) = 2 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

اگر بخواهیم با فرض $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$ معادله و شرایط مرزی مربوط به x را همگن کنیم تابع $\phi(x)$ را پیدا کنید.

حل :

$$* \ u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$$

فرض * را داخل معادله اصلی می‌گذاریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \phi''(x) - \frac{\partial v}{\partial t} = x$$

اگر بخواهیم معادله فوق همگن باشد، باید $v = 0$ ارضایش کند و این می‌طلبد:

$$\phi''(x) = x \xrightarrow{\int} \phi'(x) = \frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{\int} \phi(x) = \frac{x^3}{6} + cx + k \ **$$

اگر بخواهیم شرایط مرزی روی x همگن باشد باید:

$$v(0,t) = 0 \quad , \quad v_x(0,t) = 0$$

حال داریم:

$$* \ u(x,t) = v(x,t) + \phi(x) \quad \rightarrow \quad u_x(x,t) = v_x(x,t) + \phi'(x)$$

$$u(0,t) = v(0,t) + \phi(0) \quad \rightarrow \quad \phi(0) = 1$$

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) + \phi'(0) \quad \rightarrow \quad \phi'(0) = 2$$

با اعمال شرایط پیدا شده روی ** داریم:

$$\phi(0) = 1 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

$$\phi'(0) = 2 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

پس:

$$\phi(x) = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$$

یافتن حل حالت ماندگار «Steady state»

فرض کنید معادله با مشتقات جزئی برای تابع $u(x,t)$ داده شده باشد، در شرایطی خاص ممکن است جواب مساله برای وقتی $t \to \infty$، مستقل از زمان شده و فقط به متغیر مکانی x وابسته باشد. چنین جوابی را جواب حالت ماندگار u_{ss} می‌گویند.

توجه به این نکته مهم است که در حالت steady state مشتقات نسبت به زمان صفر خواهند بود.

مثال : در معادله $\begin{cases} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(1,t)=1 , u_x(1,t)=2 \\ u(x,0)=x \end{cases}$ ، u_{ss} کدام است؟

حل : در حالت ماندگار داریم $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$، لذا:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \quad\rightarrow\quad x\frac{\partial u}{\partial x}=A \quad\rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{A}{x} \quad\rightarrow\quad u_{ss}=A\ln x+B$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آید:

$$u_x(1,t)=2 \quad\rightarrow\quad \frac{A}{1}=2 \quad\rightarrow\quad A=2$$
$$u(1,t)=1 \quad\rightarrow\quad A\ln 1+B=1 \quad\rightarrow\quad B=1$$

پس:

$$u_{ss}(x)=2\ln x+1$$

انتخاب گزینه صحیح برای یک معادله با مشتقات جزئی همراه با شرایط کمکی

فرض کنید برای یک پدیده فیزیکی معادله با مشتقات جزئی به همراه شرایط مرزی و اولیهٔ خاص داده شده باشد.
جواب صحیح باید:

۱) تمام شرایط مرزی و اولیه داده شده را ارضاء کند.

۲) شرط محدود و کراندار ماندن را برای تمام مقادیر ممکنه متغیرها ارضاء کند.

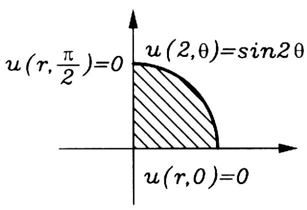
۳) معادله با مشتقات جزئی حاکم بر مساله را ارضاء کند.

از آنجائی که جواب یکتا است، لذا تنها یک گزینه می‌تواند به ارضاء هر سه موضوع فوق بیانجامد.

مثال : پتانسیل الکتریکی در داخل ربع دایره‌ای با شرایط مرزی داده شده در معادله $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$ صدق می‌کند، عبارت $u(r,\theta)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{r}{2}\sin\theta$ ۲) $\dfrac{2}{r}\sin 2\theta$

۳) $\dfrac{r^2}{4}\sin 2\theta$ ۴) $\dfrac{r^3}{8}\sin 2\theta$



حل : هندسه حل شامل $r=0$ می‌باشد و جواب ۲) در $r=0$ کراندار نیست، لذا این گزینه مردود است (بقیه گزینه‌ها شرط محدود ماندن در $r=0$ را اقناع می کنند). شرط مرزی $u(r,0)=0$ در همه گزینه‌ها ارضاء می‌شود، ولی شرط مرزی $u\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

و $u(2,\theta)=\sin 2\theta$ در جواب ۱) ارضاء نمی‌شود و در جواب‌های ۳) و ۴) اقناع می‌شوند. مثلاً با قرار دادن جواب ۳) در معادله داده شده داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{2r}{4}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{4}(-4)\sin 2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{r}(r\sin 2\theta)+\frac{1}{r^2}\left(-r^2\sin 2\theta\right)=0$$

و به سادگی می‌توان دید جواب ۴) در معادله داده شده صدق نمی‌کند، (اگرچه دیدن این موضوع ضرورتی ندارد)، پس گزینه ۳) صحیح است.

مثال: در حل مساله مقدار اولیه ـ مرزی $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 & ;0<x<L\,,\,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\,, & 0\le x\le L\\ u_x(0,t)=0\,, & u(L,t)=0\end{cases}$ تابع مفروض و تکه‌ای هموار $\varphi(x)$، نسبت به کدام پایه متعامد باید بسط داده می شود؟

۱) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{2\pi x}{2L},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{2L}$

۲) $\cos\frac{\pi x}{2L}, \cos\frac{3\pi x}{2L},\ldots,\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2L}$

۳) $\sin\frac{\pi x}{2L}, \sin\frac{3\pi x}{2L},\ldots,\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2L}$

۴) $\cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{L}$

حل: شرط $u(L,t)=0$ می‌گوید باید پایه متعامد مورد نظر در $x=L$ متحد با صفر شود:

جواب ۱ : $\cos\frac{n\pi L}{2L}=\cos\frac{n\pi}{2}$ (ارضاء نمی‌کند)

جواب ۲ : $\cos\frac{(2k-1)\pi L}{2L}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}$ (ارضاء می‌کند)

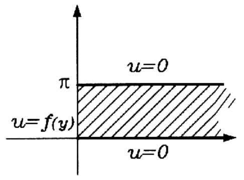
جواب ۳ : $\sin\frac{(2k-1)\pi L}{2L}=\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$ (ارضاء نمی‌کند)

جواب ۴ : $\cos\frac{n\pi L}{L}=\cos n\pi$ (ارضاء نمی‌کند)

پس بدون استفاده از شرایط دیگر، پاسخ ۲ صحیح است.

دقت کنید شرط $u_x(0,t)=0$ می‌گوید مشتق پایه متعامد مورد نظر باید در $x=0$ صفر شود که این موضوع در همه گزینه‌ها به جز جواب ۳ ارضاء می‌شود.

مثال: در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ با شرایط مرزی نشان داده شده، اگر جواب را به صورت $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}P(x)\sin ny$ فرض کنیم، جواب را به طور کامل برای دو حالت $u(0,y)=f(y)=1$ و $u(0,y)=f(y)=\sin y+2\sin 3y$ پیدا کنید.



حل : با قراردادن جواب پیشنهادی در معادله لاپلاس داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P''(x)\sin ny + \sum_{n=1}^{\infty} P(x)\left(-n^2 \sin ny\right) = 0 \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(P''(x) - n^2 P(x)\right)\sin ny = 0 \quad \to$$

$$P''(x) - n^2 P(x) = 0 \quad \to \quad P(x) = C_n e^{nx} + d_n e^{-nx}$$

لذا ساختار جواب می‌تواند به فرم زیر باشد:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{nx} + d_n e^{-nx}\right)\sin ny$$

شرط محدود ماندن جواب در $x \to +\infty$ می‌طلبد که $C_n = 0$ باشد، لذا:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-nx} \sin ny$$

حالت اول) با اعمال شرط $u(0,y) = 1$ داریم:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-n(0)} \sin ny$$

پس باید d_n ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(y) = 1$ در فاصله $[0,\pi]$ باشند، یعنی:

$$d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \sin ny \, dy = \frac{2}{\pi}\,\frac{-1}{n}\cos ny\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

و در این حالت جواب کلی چنین است:

$$u(x,y) = \sum_{n=1} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) e^{-nx} \sin ny$$

حالت دوم) با اعمال شرط $u(0,y) = \sin y + 2\sin 3y$ داریم:

$$\sin y + 2\sin 3y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-n(0)} \sin ny \to \sin y + 2\sin 3y = d_1 \sin y + d_2 \sin 2y + d_3 \sin 3y + d_4 \sin 4y + \ldots$$

$$\to \quad d_1 = 1 \quad , \quad d_3 = 2 \quad , \quad \text{بقیه } d_n \text{ ها} = 0$$

لذا در این حالت جواب کلی از فرم سری خارج شده و تنها دارای دو جمله است.

$$u(x,y) = 1 e^{-1x} \sin 1y + 2 e^{-3x} \sin 3y$$

مثال : پاسخ معادله لاپلاس، $\nabla^2 u(x,y) = 0$ در نیم‌صفحه بالای محور x با شرط مرزی: $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x|<1 \\ 0 & , \ |x|>1 \end{cases}$، کدام پاسخ می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos k}{k} e^{-ky} \sin kx \, dk$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cosh kx \, dk$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cos kx \, dk$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sinh k}{k} e^{-ky} \cos kx \, dk$

حل : با توجه به گزینه‌ها ساختار کلی جواب به صورت زیر است:

$$u(x\,,\,y)=\int_0^\infty A(k)e^{-ky}g(x)dk$$

با قرار دادن این جواب در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ به دست می‌آید:

$$\int_0^\infty A(k)e^{-ky}g''(x)dk+\int_0^\infty A(k)k^2e^{-ky}g(x)dk=0 \;\rightarrow\; \int_0^\infty \left(g''(x)+k^2g(x)\right)A(k)e^{-ky}\,dk=0$$

$$\rightarrow\; g''(x)+k^2g(x)=0 \;\rightarrow\; g(x)=c_1\sin kx+c_2\cos kx$$

پس داریم:

$$u(x\,,\,y)=\int_0^\infty A(k)e^{-ky}\left(c_1\sin kx+c_2\cos kx\right)dk$$

از شرط $u(x\,,0)=f(x)$ و با توجه به زوج بودن $f(x)$ نتیجه می‌شود $c_1=0$ و

$$\begin{cases}1 & ;|x|<1\\ 0 & ;|x|>1\end{cases}=\int_0^\infty c_2A(k)\cos kx\,dk$$

و باید:

$$c_2\,A(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi k}\sin kx\Big|_0^1=\frac{2\sin k}{\pi k}$$

پس جواب نهایی چنین است:

$$u=\int_0^\infty \frac{2\sin k}{\pi k}e^{-ky}\cos kx\,dk$$

روش جداسازی متغیرها

فرض کنید معادله با مشتقات جزئی برای تابع $u(x\,,y\,,z)$ مطرح شده باشد. با این تصور که باید $u=A(x)\,.\,B(y)\,.\,C(z)$ باشد این تابع را در معادله قرار می‌دهیم اگر بتوان پس از این کار معادله را در فرم زیر نوشت:

$$H_1(x\,,A\,,A'\,,\ldots)=H_2(y\,,B\,,B'\,,\ldots)=H_3(z\,,C\,,C'\,,\ldots)$$

آنگاه فرض اولیه صحیح بوده و طبیعتاً باید هر سه عبارت فوق یک ثابت باشند و بدین‌ترتیب به سه معادله دیفرانسیل معمولی برای توابع $A(x)\,,B(y)\,,C(z)$ می‌رسیم که با حل آن‌ها $A\,,B\,,C$ و سپس u به‌دست می‌آید.

مثال : با روش جداسازی متغیرها معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$ را حل کنید.

حل : با فرض $u(r\,,\theta)=A(r)\,B(\theta)$ و قرار دادن آن در معادله داریم:

$$A''(r)\,B(\theta)+\frac{1}{r}A'(r)B(\theta)+\frac{1}{r^2}A(r)\,B''(\theta)=0 \;\rightarrow\; r^2A''(r)\,B(\theta)+rA'(r)\,B(\theta)+A(r)\,B''(\theta)=0 \;\rightarrow$$

$$r^2\frac{A''(r)}{A(r)}+r\frac{A'(r)}{A(r)}=-\frac{B''(\theta)}{B(\theta)}=k \;\rightarrow$$

$$r^2 \frac{A''(r)}{A(r)} + r\frac{A'(r)}{A(r)} = k \quad \rightarrow \quad r^2 A'' + rA' - kA = 0 \quad \text{(معادله کوشی)}$$

$$-\frac{B''(\theta)}{B(\theta)} = k \quad \rightarrow \quad B'' + kB = 0 \quad \text{(معادله با ضرایب ثابت)}$$

با فرض $k = \lambda^2$ داریم:

$$A(r) = C_1 r^{\lambda} + C_2 r^{-\lambda} \quad , \quad B(\theta) = C_3 \sin(\lambda\theta) + C_4 \cos(\lambda\theta)$$

با فرض $k = -\lambda^2$ داریم:

$$A(r) = C_1 \sin(\lambda \ln r) + C_2 \cos(\lambda \ln r) \quad , \quad B(\theta) = C_3 e^{\lambda\theta} + C_4 e^{-\lambda\theta}$$

مثال : معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = 0$ را با روش جداسازی متغیرها حل کنید.

حل : با فرض $u(x, y) = A(x)B(y)$ و قرار دادن این عبارت در معادله داریم:

$$A'(x).B'(y) - A(x).B(y) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B(y)}{B'(y)} \quad \rightarrow \quad \frac{A'}{A} = \frac{B}{B'} = k$$

$\frac{B(y)}{B'(y)}$ فقط شامل y ، $\frac{A'(x)}{A(x)}$ فقط شامل x و k ثابت است.

پس داریم:

$$\frac{A'}{A} = k \xrightarrow{\int} \ln A(x) = kx + c_1 \quad \rightarrow \quad A(x) = e^{c_1 + kx}$$

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{k} \quad \rightarrow \quad \frac{B'}{B} = \frac{1}{k} \xrightarrow{\int} \ln B(y) = \frac{1}{k}y + c_2 \quad \rightarrow \quad B(y) = e^{\frac{y}{k} + c_2}$$

در نهایت داریم:

$$u = A.B = e^{c_1 + kx}\, e^{\frac{y}{k} + c_2} \quad \rightarrow \quad u = c\, e^{kx + \frac{y}{k}}$$

حل دالامبر معادله موج

معادله موج $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را برای $t > 0$ ، $-\infty < x < +\infty$ به همراه شرایط اولیه $\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$ در نظر بگیرید، جواب به صورت زیر قابل بیان است.

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(p)\, dp$$

توجه: برای حالت $t > 0$ ، $-\infty < x < +\infty$ به همراه شرایط مرزی همگن، همان جواب فوق قابل استفاده است، فقط باید دقت کنیم:

اولاًـ اگر شرط مرزی در $x = 0$ روی خود u داده شده بود توابع f و g را نسبت به خط $x = 0$ توسیع فرد می‌دهیم.

و اگر شرط مرزی در $x = 0$ روی مشتق u (u_x) داده شده بود، توابع f و g را نسبت به خط $x = 0$ توسیع زوج می‌دهیم.

ثانیاًـ اگر شرط مرزی در $x = L$ روی خود u داده شده بود توابع f و g را نسبت به خط $x = L$ توسیع فرد می‌دهیم.

و اگر شرط مرزی در $x = L$ روی مشتق u (u_x) داده شده بود توابع f و g را نسبت به خط $x = L$ توسیع زوج می‌دهیم.

سپس توابع حاصله را که اینک در بازه $[-2L, 2L]$ تعریف شده‌اند، با دوره تناوب $P = 4L$ به طور متناوب گسترش می‌دهیم.

مثال : در مساله مقدار اولیه ـ مرزی زیر مقدار $u(x,t)$ در نقطه $x=\frac{1}{3}\,,\,t=3$ چقدر است؟

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & ;0\le x\le 1 \quad,\quad t\ge 0 \\ u(x,0)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} & ,\quad u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

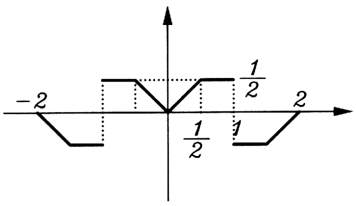
حل : داریم:

$$c=1 \quad,\quad f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} \quad,\quad g(x)=0$$

و جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\} \quad\to\quad u\left(\frac{1}{3},3\right)=\frac{1}{2}\left\{f\left(3\frac{1}{3}\right)+f\left(-2\frac{2}{3}\right)\right\}$$

و باتوجه به گسترش مناسب برای f که به فرم زیر می‌باشد.



$$f(x\pm 4)=f(x)$$

تابع f را نسبت به خط $x=0$ گسترش زوج داده‌ایم (شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است)

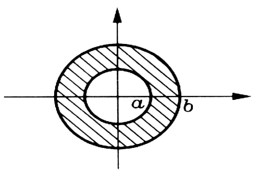
تابع f را نسبت به خط $x=1$ گسترش فرد داده‌ایم (شرط مرزی در $x=1$ روی u است)

داریم:

$$u\left(\frac{1}{3},3\right)=\frac{1}{2}\left\{f\left(-\frac{2}{3}\right)+f\left(1\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=0$$

حل معادل لاپلاس $\nabla^2 T=0$ در چند حالت خاص

۱) در حل معادله لاپلاس $\nabla^2 T=0$ در حلقهٔ دایره‌ای $a\le r\le b$ همراه با شرایط مرزی $T(a,\theta)=T_1\,,\,T(b,\theta)=T_2$ ($T_1\,,\,T_2$ باید ثابت باشند)، داریم:

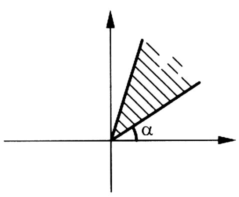


$$T(r,\theta)=A\ln r+B \quad (\text{مستقل از } \theta)$$

$$T(x,y)=A\ln\sqrt{x^2+y^2}+B$$

$A\,,\,B$ با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

۲) در حل معادل لاپلاس $\nabla^2 T=0$ در قطاع نامتناهی $\alpha\le\theta\le\beta$ همراه با شرایط مرزی $T(r,\alpha)=T_1\,,\,T(r,\beta)=T_2$ ($T_1\,,\,T_2$ باید ثابت باشند)، داریم:



$$T(r,\theta)=A\theta+B \quad (\text{مستقل از } r)$$

$$T(x,y)=A\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+B$$

$A\,,\,B$ با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

مثال : جواب معادله لاپلاس $\begin{cases} \nabla^2 T = 0 \quad , \quad 1 \le r \le e \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ T(1,\theta) = 2 \quad , \quad T(e,\theta) = 3 \end{cases}$ کدام است؟

حل :

$$T(r,\theta) = A \ln r + B \rightarrow \begin{cases} T(1,\theta) = 2 \rightarrow 2 = A \ln(1) + B \\ T(e,\theta) = 3 \rightarrow 3 = A \ln(e) + B \end{cases} \rightarrow A = 1 \quad , \quad B = 2$$

و لذا:

$$T(r) = \ln r + 2$$

مثال : جواب معادله لاپلاس $\begin{cases} \nabla^2 T = 0 \quad , \quad x \le 0 , y \ge 0 \\ T(0,y) = 1 \quad , \quad T(x,0) = 2 \end{cases}$ کدام است؟

حل :

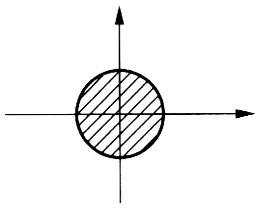
$$T(r,\theta) = A\theta + B \rightarrow \begin{matrix} y \ge 0 \quad , \quad x = 0 \; : \; \theta = \frac{\pi}{2} \\ x \le 0 \quad , \quad y = 0 \; : \; \theta = \pi \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} T(0,y) = 1 \rightarrow T\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow A\frac{\pi}{2} + B = 1 \\ T(x,0) = 2 \rightarrow T(r,\pi) = 2 \rightarrow A\pi + B = 2 \end{cases} \rightarrow A = \frac{2}{\pi} \quad , \quad B = 0$$

و لذا

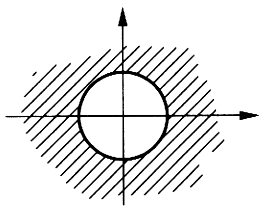
$$T(\theta) = \frac{2}{\pi}\theta \rightarrow T(x,y) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

۳) در حل معادله لاپلاس $\nabla^2 T = 0$ در داخل دایره کامل داریم:



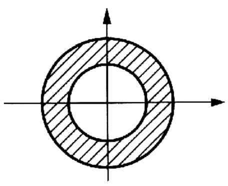
$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) . r^n$$

۴) در حل معادله لاپلاس $\nabla^2 T = 0$ در خارج دایره کامل داریم:



$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) . r^{-n}$$

۵) در حل معادله لاپلاس $\nabla^2 T = 0$ در حلقه دایره‌ای کامل داریم:



$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) . \left(c_n r^n + d_n r^{-n}\right) + k \ln r$$

در این مسایل شرط مرزی‌ها لازم نیست به صورت ثابت مطرح شده باشند.

مثال : در مساله
$$\begin{cases}\nabla^2 T = 0, & ;0 \le r \le R \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ T(R,\theta) = \begin{cases} 0 & ;-\pi < \theta < 0 \\ \theta & ;0 < \theta < \pi \end{cases} \end{cases}$$
حاصل $T(r,\theta)$ کدام است؟

حل : حل معادله لاپلاس در داخل یک دایره کامل مدنظر است. لذا داریم:

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) . r^n$$

با اعمال شرط مرزی داریم:

$$T(R,\theta) = \begin{cases} 0 & ;-\pi < \theta < 0 \\ \theta & ;0 < \theta < \pi \end{cases} = f(\theta) \;\rightarrow\; \begin{cases} 0 & ;-\pi < \theta < 0 \\ \theta & ;0 < \theta < \pi \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) \cdot R^n \; *$$

و ضرایب جملات سینوسی و کسینوسی در سری فوریه مذکور چنین به‌دست می‌آیند:

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta \;\rightarrow$$
$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{\pi} \theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi R^n}\left\{\frac{\theta}{n}\sin n\theta + \frac{1}{n^2}\cos n\theta\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi R^n}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta \;\rightarrow$$
$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{\pi} \theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi R^n}\left\{-\frac{\theta}{n}\cos n\theta + \frac{1}{n^2}\sin n\theta\right\}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi R^n}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right)$$

دقت کنید در بسط جواب * جمله ثابت که به ازاء $n = 0$ به‌دست می‌آید، باید ثابت سری فوریه $f(\theta)$ (مقدار متوسط $f(\theta)$) لحاظ شود که $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

۶) در حل معادله لاپلاس در داخل یک کره در حالت تقارن نسبت به φ داریم:

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

۷) در حل معادله لاپلاس در خارج یک کره در حالت تقارن نسبت به φ داریم:

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta)$$

که در اینجا P_n بیانگر چند جمله‌ای‌های لژاندار می‌باشد، مثلاً:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$$

استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات با مشتقات جزئی

از آنجا که لاپلاس روی متغیر زمانی اعمال می‌شود، برای تابعی مانند $u(x,t)$ داریم:

$$L(u(x,t)) = U(x,s)$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$L\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$L\left(t\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(sU(x,s) - u(x,0)\right)$$

$$L\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = x\left(s^2U(x,s) - sU(x,0) - u_t(x,0)\right)$$

$$L\left(t^2\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)\right)$$

مثال : جواب مسئله زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta_1(t) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t): \quad \text{کراندار} \\ u(0,t) = \cos t \end{cases}$$

حل : با فرض $L\{u(x,t)\} = U(x,s)$ از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s) - \left(s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)\right) = e^{-s} \quad \to \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2U = e^{-s}$$

$$U(x,s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{e^{-s}}{-s^2} \quad *$$

از شرایط مرزی لاپلاس می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \text{کراندار} \xrightarrow{L} \lim_{x\to\infty} U(x,s): \text{کراندار} \xrightarrow{*} A(s) = 0$$

$$u(0,t) = \cos t \xrightarrow{L} U(0,s) = \frac{s}{s^2+1} \xrightarrow{*} B(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}$$

حال داریم:

$$U(x,s) = \left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}\right)e^{-sx} - \frac{e^{-s}}{s^2} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\downarrow$$

$$u(x,t) = \left(\cos(t-x) + (t-x-1)u_1(t-x)\right)u_x(t) - (t-1)u_1(t)$$

استفاده از تبدیل فوریه در حل معادلات با مشتقات جزئی

از آنجا که تبدیل فوریه روی متغیر مکانی تعریف می‌شود لذا با فرض $u = u(x,t)$ داریم:

$$F(u(x,t)) = U(\omega,t) \;\rightarrow\; F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = i\omega U(\omega,t) \;,\; F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = (i\omega)^2\, U(\omega,t)$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} U(\omega,t) \;,\; F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega,t)$$

مثال: تبدیل فوریه جواب معادله

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{tt} = 0 & ;-\infty < x < +\infty \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t): & \text{کراندار} \end{cases}$$

کدام است؟

حل: با فرض $F\{u(x,t)\} = U(\omega,t)$، با فوریه گرفتن از طرفین معادله به‌دست می‌آید:

$$(i\omega)^2\, U(\omega,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega,t) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \omega^2 U = 0 \;\rightarrow\; U(\omega,t) = c_1(\omega)e^{\omega t} + c_2(\omega)e^{-\omega t}$$

چون: کراندار: $\lim\limits_{t\to\infty} U(\omega,t) \rightarrow$ کراندار: $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ پس باید:

$$\begin{matrix} \omega > 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0 \\ \omega < 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0 \end{matrix} \;\rightarrow\; U(\omega,t) = c\, e^{-|\omega| t}$$

با تبدیل فوریه گرفتن از شرط مرزی $u(x,0) = f(x)$ داریم:

$$U(\omega,0) = F(\omega) \;\rightarrow\; U(\omega,t) = F(\omega)\, e^{-|\omega| t}$$