

بَلْهَاءِ مُهَنْدِسَانِ سَهْلَانِ

# كتاب الالكترو مختاطي موسى ياره

تمامی حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به پارسه می باشد

فصل نهم: تئوڑی تصویر

www.sem-eng.com

## فصل ۹

### تئوری تصویر

مقدمه



سال هاست که این فصل در زندگی اجداد ما تأثیرات بزرگی گذاشته است و آینه یکی از مهمترین ابزار در مهندسی، فیزیک، آرایش، پیرایش، پزشکی، دامپزشکی و به خصوص ادبیات بوده است. تالار آینه در تخت جمشید، کاربرد «تئوری تصویر» در ایران باستان را نشان می‌دهد. وقتی شما جلوی آینه می‌ایستید، قرینه می‌شوید، وقتی لامپ را جلوی آینه می‌گیرید، روشنایی اش بیشتر می‌شود، وقتی آنتنی را جلوی آینه (هادی) می‌گیرید،<sup>۱</sup> میزان تشعشع اش زیاد می‌شود و... خلاصه تئوری تصویر چیز خیلی به مردم بخوبی است! بیشک مفهوم تصویر یکی از زیباترین مفاهیم در درس الکترومغناطیس است. از اینجا شروع می‌کنیم که اصلاً مشکل کار کجاست که نیاز به تئوری تصویر داریم؟

#### ۱-۹ مفهوم تئوری تصویر



کنید؛ اگر یک بار نقطه‌ای  $q$  در فضای آزاد داشتیم و من از شما می‌پرسیدم که میدان و پتانسیل در فاصله  $R$  از این بار نقطه‌ای چقدر است، شما با خیال راحت و به سادگی جواب می‌دادید:

$$\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad , \quad V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

حال سؤالم را این گونه می‌پرسم:

بار نقطه‌ای  $q$  در مجاورت یک صفحه هادی «مثالاً زمین» قرار گرفته است. میدان و پتانسیل را در فاصله  $z$  از همان بار  $q$  بایابید.

یعنی یک بلایی سر این سیستم بیاوریم که:  
 ۱) در روی سطح رسانا، فقط مؤلفه عمود میدان داشته باشیم.  
 ۲) کاری کنیم که پتانسیل روی مرز (هادی) برابر صفر شود.  
 اگر بخواهید این «کانفیگوریشن» را تحلیل کنیم و شرایط مرزی را ارضاء کنیم، مرز بدنان (پوستن) کنده می‌شودا پوست خیلی از پیشینیان در همین راه به فنا رفت، تا...  
 حالا ببینید این پیشنهاد که من می‌دهم به درتنان می‌خورد؟ یک بار  $\Psi$ - را در زیر صفحه هادی و به همان فاصله از صفحه هادی قرار دهید...

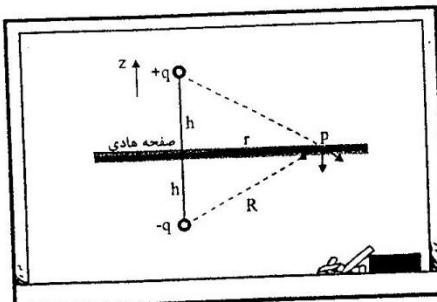


اصلًا برای چی دست به این حرکت زدیم؟ مگه مجازیم که سیستم رو دست کاری کنیم و خودمون یک بار اضافه کنیم؟



شما این کار رو بکنید. می‌بینید که قرار دادن  $\Psi$ - چه کمکی به شما می‌کند. من بقیه چیزها رو توضیح می‌دهم:

بررسی شرط اول: میدان برآیند در نقطه  $P$ ، فقط مؤلفه عمودی دارد.



بررسی شرط دوم: چراکه مؤلفه‌های مماسی با هم خنثی می‌شوند... تجسم کنید.

پتانسیل در نقطه  $P$ : این دیگر واضح است که برابر صفر است؛ با این وجود می‌بینید که شرایط مرزی ارضاء شد.

چه کسی این کار را کرد؟



این شاهکار را جناب تصویر یعنی  $\Psi$ - برای ما انجام داد. دقیق کنید؛ انتگار  $\Psi$ -، تصویر بار  $q$ + در آینه صفحه هادی است...

فقط با علامت مخالف...

اصلًا به همین دلیل به این تئوری، تئوری تصویر می‌گویند...



$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

این که همون بالایی شد؛ کاری نداره که...



مشکل همین جاست. ایرادهای پاسخтан به سؤال دوم را گوش کنید.

۱) میدان باید عمود بر هادی باشد، حال آنکه میدانی که شما برای نقطه  $P$  به دست آوردید، شعاعی است و بر هادی عمود نیست.

۲) پتانسیل روی هادی (که درینجا زمین است) باید صفر باشد ولی شما عبارت غیرصفر به دست آوردید ...

چرا این طوری شد؟

به طور خلاصه، سیستم این مسئله تمام شرایط مرزی ما را به هم ریخت...

یعنی در اینجا قانون کولن اشتباه است... همان طوری که گفتیم، طبق شرایط مرزی میدان باید بر سطح رسانا عمود

باشد... اگر قرار باشد که میدان بر سطح رسانا عمود باشد، پس دیگر میدان  $\Psi$  در نزدیک هادی شعاعی نیست و وقتی شعاعی نباشد، درنتیجه قانون کولن صادق نیست و این یعنی تناقض!



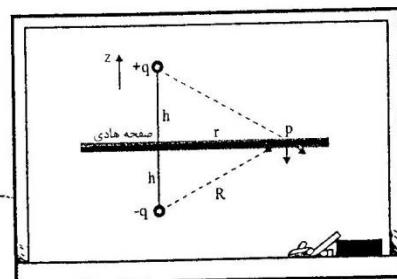
حالا تکلیف ما با این تناقض چیست؟



حالا هدف ما این است که شرایط مرزی را ارضاء کنیم ... کلاً بکی از مهمترین مقوله‌ها «ارض» شدن مرزهای است.



بله، شرایط مرزی که به خاطر وجود صفحه هادی به هم خورده بود... حال می‌خواهیم حرفهایی را که زدیم به زبان ریاضی هم نشان دهیم، هادی را دور می‌اندازیم و به جایش جناب تصویر را می‌آوریم؛ اگر می‌خواهیم میدان و پتانسیل یک دوقطبی را در نقطه  $p$  به دست آوریم، برای دو قطبی داشتیم:



$$v_p = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \quad \text{and} \quad \bar{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} [2\cos\theta \hat{R} + \sin\theta \hat{\theta}]$$

با توجه به شکل در روی زمین ماجرا این جوری می‌شه:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} v_p = 0 & \text{دیدی صفر شد...} \\ \bar{E} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \frac{h}{R} (-\hat{z}) = \frac{-qh}{2\pi\epsilon_0 R^3} \hat{z} & \text{در نقطه } p \text{ همان } \hat{\theta} \text{ است} \end{cases}$$



دیدید می‌دان فقط مؤلفه عمودی دارد...

حال برای یافتن بار القابی روی سطح تلاش می‌کنیم:

$$Q_{\text{سطح}} = D_n = \epsilon_0 E_n = \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

و می‌گوییم:

$$Q_{\text{سطح}} = \int_S p_s ds$$

بار القابی روی کل صفحه هادی عبارت است از:

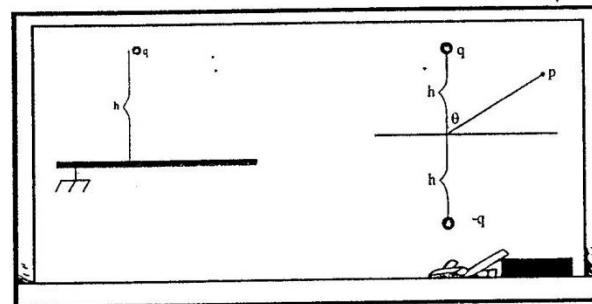
$$Q_{\text{سطح}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot r dr d\phi = -q$$



می‌خواهم خلاصه کنم؛ در سیستم‌هایی که بار در مقابل صفحه هادی قرار دارد، اگر از روش‌های معمول استفاده کنیم شرایط مرزی به این راحتی‌ها برآورده نمی‌شود و نمی‌توان مسئله را حل کرد. در اینجا تئوری تصویر به داد ما می‌رسد؛ یعنی، تئوری تصویر می‌گوید: اثر صفحه هادی، معادل است با اثر بار تصویر  $-q$  در فاصله برابر با فاصله بار اصلی تا صفحه هادی. یعنی صفحه هادی، باعث القای بار  $-q$  در زمین می‌شود که می‌توان برای حل مسئله، صفحه هادی را دور انداخت و بار  $-q$  را به عنوان نماینده تمام اختیار صفحه هادی در نظر گرفت.



پس این دو مسئله یا به عبارتی این دو سیستم، با هم معادل‌اند؛ در شکل چیزی هادی هست ولی در شکل راستی دیگر خبری از جناب هادی نیست و جایش را به تصویر داده است.



پس هدفان از استفاده کردن از تئوری تصویر چیست؟



ارض ای ش رای ط مرزی... ارض ای ش رای ط مرزی... ارض ای ش رای ط مرزی...



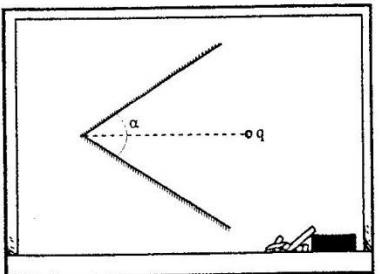
آفرین! این همه چیزو از کجا یاد گرفتی؟



از فزوین و سیرجان که پره از آتن‌هایی که بالای صفحه هادی قرار دارن و بخش عظیمی از آتن‌های موج کوتاه ایران

همون جاست. من اسم اونجا را «دشت آتن» گذاشته‌ام، یک بار که از اونجا بگذری، تئوری تصویر را خوب خوب می‌فهمم!

برای هادی با صفحات متقاطع ماجرا این جوری می‌شه:



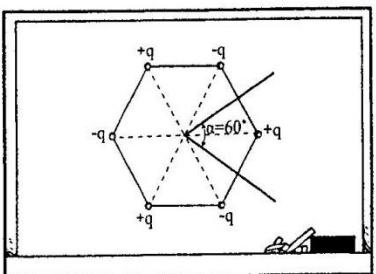
$$\text{تعداد تصاویر} = \frac{360}{\alpha} - 1$$

اگر  $\alpha = 180^\circ$  شود، آن‌گاه تعداد تصویر برابر ۱ می‌شود ... همان حالت معمول صفحه تخت و بار نقطه‌ای؛ حالا اگر  $\alpha = 60^\circ$  باشد، آن‌گاه تعداد تصاویر ۵ تا می‌شود.

تصاویر ۵ تا می‌شود.



یادتان باشد که در هر بار تصویر کردن، علامت بار عوض می‌شود. به عنوان نمونه برای  $\alpha = 60^\circ$  داریم:



دیدید به اندازه ۴- روی صفحه زمین بار الفا شد... همین باعث شد که ما صفحه هادی را بابار ۹- مدل کنیم دیگر... حالا اگر یک نفر از ما پرسه که نیروی بین بار ۹+ و صفحه هادی چقدر، چه پاسخی می دیم؟ به عبارت دیگر وقتی بار ۹+ را نزدیک صفحه زمین می آزیم، یکو صفحه زمین پر می شه از مورچه بارهای فضلی منفی و این یعنی اینکه باید بر آینه نیروی بین بار ۹+ و همه اون مورچه فضلی ها رو پیدا کنیم.

مورد چه فسقلی‌ها را پیدا کنیم.



گه بخواهیم این مسئله را از روشنی که الان گفتید حل کنیم، زیر پا هامون علف سبز می شه؛ من که این طور جواب می دهم

۹- را به عنوان نماینده تام‌الاختیار صفحه هادی در نظر گرفتیم، به عبارتی به جای نیروی بین  $q +$  و صفحه هادی، نیروی بین  $q +$  و  $-q$  را به دست می‌آوریم؛ یعنی این دو نیرو متعادل‌اند، یعنی مستله حل شد؛ یعنی خیلی حال داد!

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4h^2} \quad (\text{این نیرو جاذبه است.})$$

$$w_e = \frac{\left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i v_i \right)}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2h}$$

می دانید چرا درنهایت تقسیم بر 2 کردیم؟



نرژی کل فضای تقسیم بر  $2$  میکنیم تا نرژی در نیم فضای بالای زمین که میدان داریم، حساب شود:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} [\mathbf{q} \times \mathbf{v}] = \frac{1}{2} q \left( \frac{\mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0(2h)} \right)$$

$$w = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h}$$

من چند جمله امتر رو خوب فهمیدن؟ اصلاً بذارین یه جووری بگم که تا آخر عمر توی مغزتون بمونه؛ وقتی یک لامپ رو جلوی آینه گذاشته، پشت آینه کسماکان تاریکه اما این طرف نور بیشتر می شده. اگه فهمیدنین چی می گم توضیح بدین!



له که فهمیدیم، منظورتون اینه که وقتی بار ۹ در فضای لایتناهی (ازاد) قرار داره، میدانش از همه طرف همه جا میره، ولی

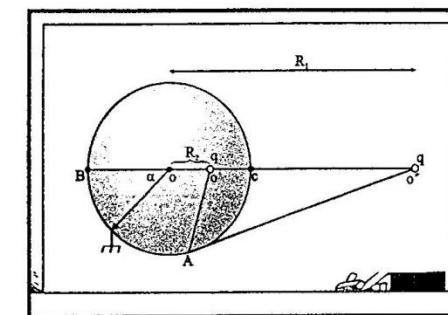
شی! یعنی صفحه زمین یک بار تک قطعی رو به یک دو قطعی تبدیل می‌کنه.

و انرژی از این رابطه به دست می آید:

$$w_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 q_i v_i$$

اگر تعداد تصاویر عدد صحیح فرد باشد، می توان از ثوری تصویر استفاده کرد ولی اگر تعداد تصاویر اعشار و یا زوج باشد، باید از طریق معادله لابلان مسئله را حل کرد. مطمئن شو که شما هم موافقید این بحث آخر رو بسپریم به علاقه مندان علم محض الکترومغناطیس، خصوصاً دوستان خوب فیزیکی مون...

### ۳-۹ تصویر یک بار نقطه‌ای مجاور یک کره هادی



واقعاً بیشتر شبیه یک بازی است: بار  $q'$  به تنهایی و با بدکارگیری قانون کولن شرایط مرزی را نقض می کند. باید یک بار نقطه‌ای  $q$  را در وضعیت قرار دهیم که پتانسیل برآیند را روی کره برابر صفر کند. از من می پرسند اندازه بار  $q'$  چقدر باشد؟ هنوز نمی‌دانیم... دقیقاً  $q'$  را در کجا قرار دهیم؟ هنوز نمی‌دانیم. الان، آرام آرام تمام این جواب‌ها را می‌باییم.

پتانسیل برای همه نقاط روی هادی باید صفر باشد، منظورم اینه که:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{O''A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{O'A} = 0$$

برای نقاط  $B$  و  $C$  روی کره هادی این امر را محقق می‌کنیم. لطفاً به جای اینکه هی بپرسین  $A$  و  $B$  و  $C$  کجا‌یان به شکل قبلی نیم‌نگاهی بیاندارین.

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R_1+a)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(R_2+a)} = 0$$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R_1-a)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(a-R_2)} = 0$$

الآن مجھوّل‌هایمان  $q'$  «اندازه بار تصویر» و  $R_2$  « محل بار تصویر» هستند. از دو معادله بالایی، دو مجھوّل‌مان را حساب می‌کنیم.

$$q' = -\frac{q}{\frac{R_1}{R_2}}$$

$$R_1 R_2 = a^2$$

$q'$ : اندازه بار تصویر  
که در آن  $R_2$ : فاصله بار تصویر تا مرکز کره هستند.

این دو نتیجه گران‌بها را همین حالا حفظ کنید. از تو می‌برسم...



یعنی اگر باری به اندازه  $q'$  در نقطه‌ای به فاصله  $R_2$  از مرکز کره هادی قرار دهیم، تمام شرایط مرزی را ارضا کرده و

پتانسیل روی هادی را صفر می‌کند.



حالات مهم دیگر؛ در اینجا، هادی را زمین کرده بودیم. اگر در مسئله‌ای هادی به پتانسیل  $V_0$  (یک باتری) وصل شده‌بود چه

کنم؟ خودتونو اذیت نکنیم، خودم جواب می‌دم...

بار  $q'$  سر جای خودش می‌ماند تا نقاط روی مرز را هم پتانسیل کند. حالا باید کاری کنیم که این پتانسیل مشترک  $V_0$  شود.

برای این امر از بار دیگری به نام  $q'$  دعوت به عمل می‌آوریم. بار  $q'$  را می‌آوریم به قصد اینکه شرایط پتانسیل  $V_0$  در تمام سطح کره را

ارضا کند. خوب به این قیمت حرفاًی من کنید.



اگر بار  $q'$  در مرکز کره‌ای به شعاع  $a$  بنشیند، در سطح کره چه پتانسیلی ایجاد می‌کند؟

این که خیلی واضحه:



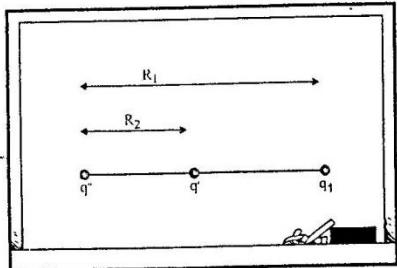
$$V = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}$$

خب، ما برای صفر کردن پتانسیل مجبور شده بودیم که بار  $q'$  را در فاصله  $R_2$  از مرکز کره قرار بدم، اما حالا گفته که باید بارهای داخل کره هم  $Q_0$  باشند، پس چه کنیم؟



از بار  $q''$  دعوت به عمل آورده تا در مرکز کره بشیند و شرط ما را ارضاء کند. یعنی اندازه  $q''$  چنان باشد که:

$$q'' + q' = Q_0$$



۱- بار  $q$  به فاصله  $R_1$  از مرکز یک کره هادی به شاعر  $a$  قرار دارد. نیروی وارد بر کره از طرف بار  $q$  را در حالت زیر پیدا کنید.



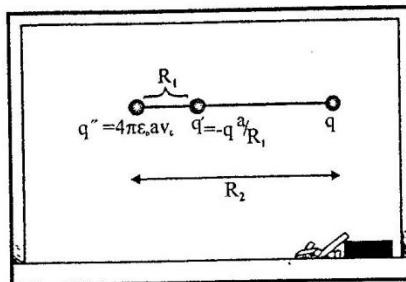
(الف) کره دارای پتانسیل ثابت  $V_0$  باشد.

(ب) کره دارای بار  $q_0$  باشد.



قبل‌آهم عرض کرده بودم که برای محاسبه نیرو، باید هادی را با نماینده‌های تمام اختیارش جایگزین کرد.

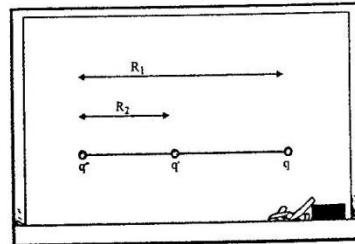
در قسمت الف سیستم معادل چنین است:



پس اگر  $q''$  بخواهد  $V_0$  را در سطح کره ایجاد کند، باید در مرکز کره قرارش بدھیم و اندازه‌اش به راحتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} = V_0 \rightarrow q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

یعنی "کره دارای بار  $q''$  باشد تا شرط را ارضاء کند. مانند شکل:



$$\begin{cases} q' = -q \frac{a}{R_1} \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} \end{cases}$$

حال مهم دیگر؛ اگه کره ایزوله و دارای بار  $Q_0$  باشه، آن گاه تئوری تصویر چه جوری می‌شه؟ بازم به خودتون زحمت ندین!

ابندا من این نکته را به شما بگم که همیشه بار القابی روی هر سطح بسته = جمع جبری بارهای درون آن سطح است.

حال فهمیدید که ایزوله بودن چه شرطی جلوی پای ما گذاشت؟

این که گفته کره ایزوله باشه و دارای بار  $Q_0$  باشه، یعنی هر بلایی سر کره بیاری، چون دارای بار  $Q_0$  است، باید بارهای داخلش

به مونه  $Q_0$  هم



و در حالت (ب)  $q', q''$  که پتانسیل شان در محل کره صفر است؛ پس فقط "q" است که پتانسیل ایجاد می‌کند و برابر است با:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_0 + q \frac{a}{R_1}}{a} \right]$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{a^2}{R_1} \\ q' &= -q \frac{a}{R_1} \\ q'' &= 4\pi\epsilon_0 a V_0 \end{aligned} \Rightarrow F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q q'}{(R_1 - R_2)^2} + \frac{q'' q}{R_1^2} \right]$$

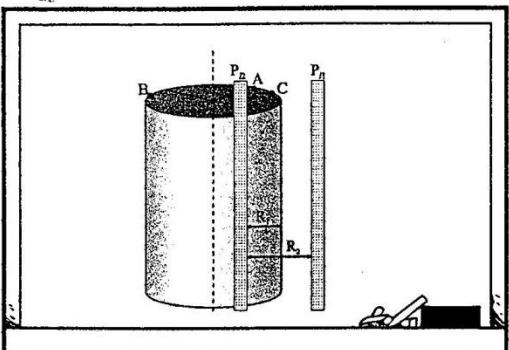
ب) در این حالت، سیستم معادل، مانند قسمت قبل خواهد بود فقط مقدار بار "q" تغییر کرده است:

$$q'' = q_0 - q'$$



تمویر این بار خطی، یک بار خطی است با مشخصات زیر اگر مانند حالت قبل «کره هادی» پتانسیل نقاط A و B و C را برابر

صفر قرار بدهیم، و معادلات را حل کنیم چنین به دست می‌آوریم:



$$\rho_{\ell_2} = -\rho_{\ell_1}$$

$$R_1 R_2 = a^2$$

## ۵-۹ جمع‌بندی



بحث تصویر را سریع جمع‌بندی می‌کنیم، خیلی جاها را فقط روی تخته می‌نویسیم و بدون شرح از آن می‌گذرم. خودتون حدیث

مقصل را از این مجلد بخونین!

حل:



در حالت (الف) بارهای القابی روی کره = جمع جبری بارهای درونش بود، بنابراین:

$$Q_{\text{bar}} = -q \frac{a}{R_1} + 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

چون کره مانند آینه کروی عمل می‌کند، تصویر در آینه کروی دقیقاً مشابه با خود شیء نیست، مگر در چند حالت خاص که توضیح می‌دهم.

بینید در این حالات خاص قرار است که شیء در آینه کروی عین خودش دیده شود.

از طرفی دیدیم که هر نقطه با فاصله  $R_1$  از مرکز کره هادی، به فاصله  $\frac{a^2}{R_1} = R_2$  انتقال خواهد یافت.

حال با این تفاسیر، چه شکل‌هایی هستند که اگر داخل کرده انتقال یابند تصویرشان عین خودشان می‌شود؟



- ۱- بار نقطه‌ای تابلوست دیگر... چون تصویرش هم یک نقطه است. (به عبارتی نقطه چیه که کله پاچه داشته باشه!?)
- ۲- کره‌ای به مرکز کره هادی (باخشی از آن)
- ۳- حلقه‌ای به مرکز کره هادی (باخشی از آن)
- ۴- پاره خط در امتداد شعاع کره هادی



چقدر عالی آفرینا حالا بگو ببینم علت موارد ۲ و ۳ را می‌دانی؟

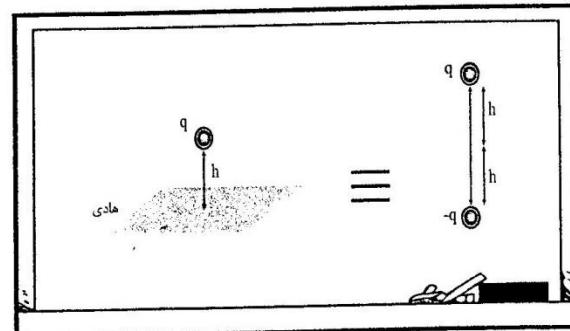
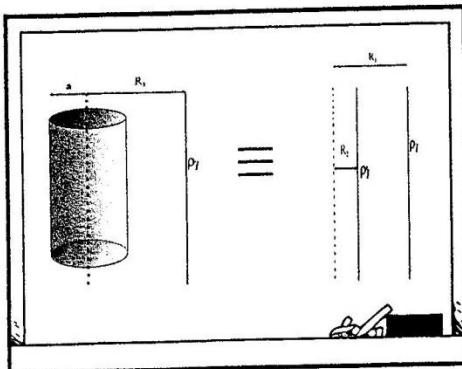


آخه در موارد ۲ و ۳  $R_1$  برای تمام نقاط یکسانه و هنگام تصویرشدن،  $R_2$  هم برای تمام نقاط تصویر یکسان می‌شے، پس



دوباره همان شکل اول ایجاد می‌شه.

تصویر کنید ...



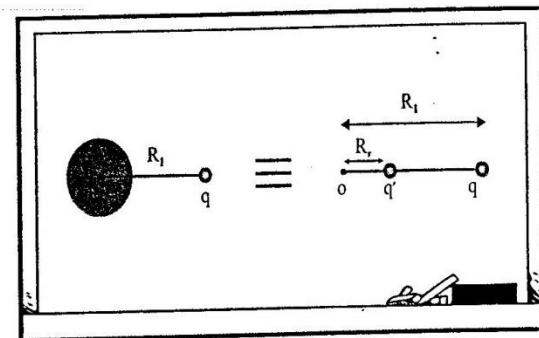
و جذب‌تر ایکه در این حالت، حتماً لازم نیست بار نقطه‌ای باشه، هر نوع بار دیگری هم باشه، دقیقاً همنین طور عمل می‌کنیم. می‌دونن چرا؟



آخه صفحه هادی مثل آینه تخت عمل می‌کنه، هرکس دقیقاً عین تصویر خودش رو در آن می‌بینه؛ یعنی فاصله شخص «بار»

تا آینه برابر است با فاصله تصویر تا آینه... یاد فیزیک نور به خیر...

(ب)



$$\left\{ \begin{array}{l} q' = -q \frac{a}{R_1} \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} \end{array} \right.$$

حالات‌ای ایزوله و با پتانسیل ۰ را هم قبلاً گفتیم که بار "q" اضافه می‌شود...



نکته مهم این است که در حالت کروی، این اتفاق در مورد هر نوع باری صادق نیست؛ یعنی این حرف‌ها فقط برای بار نقطه‌ای

و چند جو خاص دیگر صادق می‌دانی چرا؟

مرکز بیانی  $R_2 = \infty \Rightarrow R_2 = 0 \rightarrow A' = 0$ محدود  $\rightarrow R_2 \rightarrow R_1$  محدود بیانی

$$\text{روی محیط } R_2 = a \Rightarrow R_2 = \frac{a^2}{a} = a \rightarrow C' = C$$

بعنی تصویر C روی خودش می‌افتد. حال اگر از  $+ \infty$  تا نقطه C حرکت کنیم، نمودار شبیه نقطه‌چین داخل شکل تغییر می‌کند یعنی همان

«سیر A'B'C» و با حرکت از C تا  $-\infty$  این شکل بسته می‌شود.

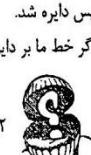
برای نقطه کلی B' مختصات x, y را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = \frac{a^2}{R_1} \cos \alpha = \frac{a^3}{R_1^2} \\ y = \frac{a^2}{R_1} \sin \alpha = \frac{a^2 h}{R_1^2} \end{cases}$$

و با کمی عملیات چنین معلوم می‌شود که:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^4}{R_1^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{aa^3}{R_1^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = ax$$

$$\left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2$$

۲- یک حلقه با چگالی پکتواخت P به شعاع d هم مرکز با کرم‌هادی به شعاع a ( $d > a$ ) است و کره در پتانسیل صفر

(سراسری ۱۲۸۲)

$$-\frac{a^2}{d^2} \rho_t \quad (f)$$

$$-\frac{a}{d} \rho_t \quad (g)$$

$$-\rho_t \quad (h)$$

$$-\frac{d}{a} \rho_t \quad (i)$$

به نظر شما مسئله با شکل تصویر کار داره یا اندازه تصویر؟

شما حواس کجاست؟ نکنه باز دوباره چیزی یافته که اینقدر شادی!



دقیقاً، اما این بار از دوران پیش از دستان؛ یادم که از مادرم پرسیدم چرا قیافه ما توی آینه صاف عین خودمونه ولی

قیافه‌مون توی سماور مثل قورباغه می‌شه؟ مادرم گفت: پسرم صبر کن؛ هر وقت قدت از سماور بلندتر شد، خودت می‌فهمی...



۱- میله‌ای بسیار بلند مطابق شکل به طور تقریباً جسمی به یک کره هادی به شعاع a قرار دارد. در این صورت تصویر این میله



داخل کرده هادی کدام است؟



(۱) خط

(۲) دایره

(۳) سه‌ضلعی



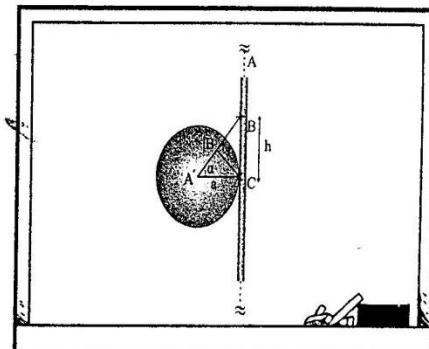
حل:

قبل از حل مسئله به این حرف من گوش کنید:

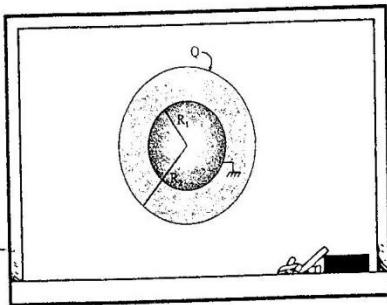
$$\left. \begin{array}{l} q' = -\frac{a}{R_1} \text{ می‌رویم سراغ} \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} \text{ می‌رویم سراغ} \end{array} \right\} \text{در مسائل تصویر، اگر مسئله}$$

$$\text{در این مسئله، شکل تصویر را خواسته، پس ما به سراغ } R_2 = \frac{a^2}{R_1} \text{ می‌رویم}$$

باید تصویر نقاط مختلف را بیابیم، به شکل نگاهی بیاندازید:



طبق حرفهایی که قبلاً زدیم، تصویر کره باردار  $R$  نسبت به کره زمین شده، می‌شود یک کره‌ای با بار  $Q'$  و شعاع  $R'$ ، به طوری که:



$$Q' = -Q \frac{R_1}{R_2}$$

$$R' = \frac{R_1^2}{R_2}$$

حال برای یافتن میدان در فاصله بین  $r < R_2$  می‌توان گفت:

$$E_r = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E_r = \frac{-Q \frac{R_1}{R_2}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

گزینه ۳ درست است.



رد گزینه‌های خوشگل در اینجا بسیار می‌چسبد؛ دقت کنید که در اینجا، «خوشگل» صفتی است برای عمل پسندیده «رد»

گزینه «نه خود گزینه»؛ چراکه اگه گزینه‌ای خوشگل باشه، آن را رد نمی‌کنیما  
اگر  $R_2 \rightarrow \infty$  یعنی بار  $Q$  آنقدر از کره  $R_1$  دور می‌شه که اصلاً دیگر باری تصویر نمی‌شه؛ چونکه:

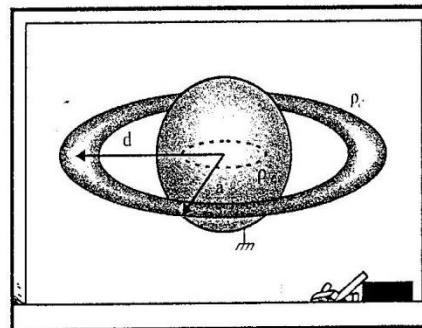
$$Q' = -Q \frac{R_1}{R_2} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \infty} Q' = 0$$

و اگر باری تصویر نشه یعنی دیگه میدان درونگرا باری نمی‌بینه که بخواهیم میدان داشته باشیم، به عبارت دیگه:

$$\text{if } R_2 \rightarrow \infty \Rightarrow E_r = 0$$

پس فقط گزینه ۳ می‌تونه درست باشد. خداوکلی «خوشگل» نبود؟

من که می‌گویم هر دو ...



کل بار بیرون برابر است با چگالی خطی ضرب در طول، یعنی:

$$q = \rho_\ell 2\pi d$$

می‌دانیم تصویر حلقه هم‌مرکز با کره دوباره همان حلقه می‌شود با شعاع  $R$  و بار  $q'$ ، به طوری که:

$$q = \rho_\ell 2\pi d \Rightarrow q' = -\rho_\ell 2\pi d \frac{a}{d} \Rightarrow \rho'_\ell = \frac{-2\pi d \rho_\ell a}{2\pi \frac{a^2}{d}} \Rightarrow \rho'_\ell = \frac{-\rho_\ell}{a} d$$

یعنی تصویر ما حلقه‌ای است به شعاع  $\frac{a^2}{d}$  و به چگالی  $-\frac{\rho_\ell}{a} d$ ، یعنی گزینه ۱ درستها



آ- در فضای خالی بار  $Q$  به طور یکنواخت بر روی کره‌ای به شعاع  $R_1$  پخش شده است. این کره، کره رسانایی به شعاع  $R_1$

(سراسری ۱۳۸۳)

را که زمین شده است احاطه می‌کند. میدان الکتریکی در فضای بین دو کره برابر است با:

$$E_r = \frac{\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (f) \quad E_r = \frac{-R_1}{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (G) \quad E_r = \frac{\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (H) \quad E_r = \frac{Q \left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (I)$$



خیلی جالبها یادم که یکی از بهترین استادهای ما می‌گفت: در مهندسی «تقریب» جایگاه ویژه‌ای داره و مهندسی بدون

تقریب معنی نداره! حالا می‌بینیم که علاوه بر مسائل فنی، در حل مسائل تئوری هم «تقریب» جایگاه ویژه‌ای داره.

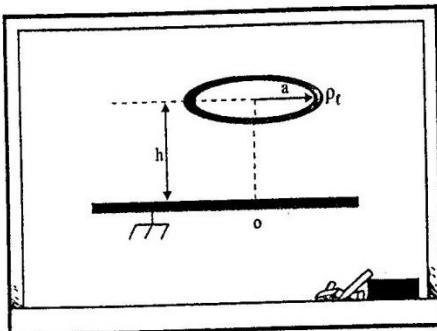


بله؛ تقریب در تمام شون زندگی مهمه. کمی بپش فکر کنین، منظورمو می‌فهمین!



۵. حلقه‌ای به شعاع  $a$  با چگالی بار خطی  $\rho_t$  به موازات صفحه هادی زمین شده  $Z = 0$  و با فاصله  $h$  از آن قرار گرفته.

(سراسری ۱۳۸۱)



$$\frac{-ah\rho_t}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۱)$$

$$\frac{a^2h\rho_t}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۲)$$

$$-\frac{ap_t}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۳)$$

$$\frac{h^2\rho_t}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (۴)$$

۴- ۳ کره رسانا به شعاع  $a$  در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $L >> a, L$  قرار گرفته‌اند. در ابتدا بار هر کره  $Q$  بوده است. یکی از کره‌ها به زمین متصل شده است تا به حالت تعادل برسد. بار کره زمین شده تقریباً برابر است با:

$$-\frac{a^2 Q}{L^2} \quad (۱)$$

$$-\frac{2aQ}{L} \quad (۲)$$

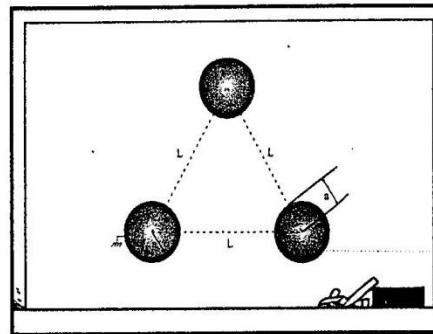
$$-\frac{Qa}{L} \quad (۳)$$

(۱) صفر

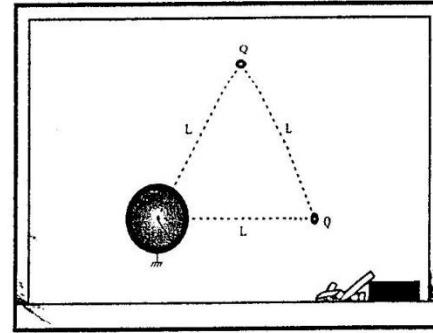


شکل رارسم می‌کنیم. (خیلی وقت‌ها مسئله شکل نداره و خوبه که ما برایش شکل بکشیم)

پکی از کره‌ها زمین است. باید به وسیله تئوری تصویر، بار تصویرشده ناشی از دو کره دیگر، در کره زمین شده را بیابیم، اصل مسئله همین است:



چون  $a >> L$  است، می‌توانیم دو کره را به صورت دو بار نقطه‌ای در نظر گرفته و تصویرشان را چنین حساب کنیم:



$$Q' = \frac{-Qa}{L} \quad \text{تصویر یکی از کره‌ها}$$

و حالا ضرب در  $2$  می‌کنیم:

$$= \frac{-2Qa}{L} \quad \text{تصویر بار ۲ ناکره (چون شرایط یکسان دارند)}$$

پس گزینه ۳ درست است.

عنیم فضای  $0 \leq z$  رسانای کامل است. یک بار رشته‌ای با چگالی یکنواخت  $\lambda$  موازی با صفحه  $xoy$  و به فاصله ۱ از آن

و در صفحه  $xoy$  واقع است. مقدار بار القا شده روی صفحه  $z=0$  در فاصله نواری شکل  $1 \leq |y| < 0$  و بر واحد طول  $1 < x < 0$  چقدر است؟

(سراسری ۱۳۸۱)

$$-\frac{2\pi}{\lambda} \quad (4)$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi} \quad (5)$$

$$-\frac{\lambda}{\pi} \quad (6)$$

$$-\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

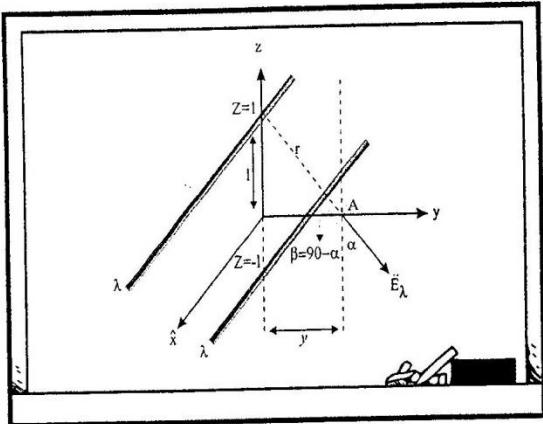


طبق روش حل از آخر مسئله را دنبال می‌کنیم:

رامی خواهیم  $\leftarrow D_0$  رامی خواهیم  $\leftarrow E_2$  رامی خواهیم  $\leftarrow E_\lambda$

حالا مسئله اصلی یافتن میدان این خط بار و تصویرش در «یک نقطه دلخواه مثلاً  $A$ » است. به فرموده آقای گاوس میدان این جویه:

$$E_\lambda = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \Rightarrow D_\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$$



قبول دارید که در نقطه  $A$  میدان برآیند فقط مؤلفه  $\hat{z}$  دارد، یعنی در بین دو رشته خط و روی صفحه چنین داریم:

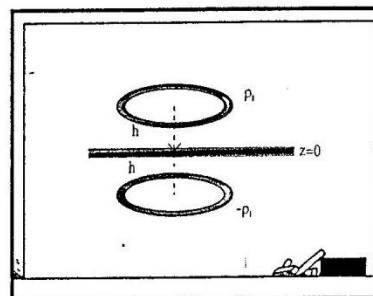
$$\bar{D}_n = \rho_s = \frac{2\lambda}{2\pi} \cos(\alpha - \beta) = \frac{-\lambda}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \hat{z}$$

$$\rho_s = \frac{-\lambda}{\pi} \sin\beta = \frac{-\lambda}{\pi} \times \frac{1}{r} = \frac{-\lambda}{\pi r^2} \Rightarrow \rho_s = \frac{-\lambda}{\pi(1+y^2)}$$

$$Q = \int_S \rho_s ds = \int_S \rho_s dx dy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-1}^{y=1} \frac{-\lambda}{\pi(1+y^2)} dx dy = \frac{-\lambda}{2}$$

باز هم دیدیم که بار مثبت  $\lambda$ ، بار منفی القا کرد. یعنی گزینه ۱ درست است. (لطفاً برای درک بهتر، دوباره مسئله را خودتان حل کنید.)

صفحه هادی را دور انداخته و سیستم را چنین مدل می‌کنیم:



از فصل‌های اولیه به یاد داریم که میدان ناشی از حلقه باردار روی محورش عبارت بود از:

$$E = \frac{\rho_t a h}{2\epsilon_0 (a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در این مسئله میدان دو حلقه باردار باهم هم‌جهت و در راستای  $\hat{z}$  هستند؛ یعنی در نقطه  $O$  میدان کل این‌جوری می‌شه:

$$\bar{E} = \frac{\rho_t a h}{2\epsilon_0 (a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} (-\hat{z})$$

از طرفی برای چگالی بار سطحی از دوست و ندیم قدیمی‌مان یعنی شرایط مرزی کمک می‌گیریم:

$$\rho_s = D_n = \epsilon_0 E_n \Rightarrow \rho_s = \frac{-\rho_t a h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

خوشتان آمد؟!



بله، ولی می‌توان با رد گزینه هم برخی گزینه‌ها را حذف کرد، حرفهایی مثل این:

بار مثبت باید بار منفی القا کند، پس گزینه‌های ۱ و ۳ اشتباه هستند، از طرفی:

$$\text{if } h \rightarrow 0 \Rightarrow q \rightarrow 0 \Rightarrow \rho_s = 0 \Rightarrow$$

گزینه ۲ نادرست است.

یعنی اگر فاصله حلقه با زمین خیلی کم شود، فاصله‌اش با تصویرش هم کم شده دیگر؛ یعنی انگار حلقه با چگالی  $\rho$  به تصویر با چگالی

$\rho$ -چسبیده و حاصل صفر است یعنی گزینه ۴ درست می‌شود؛ استاد شما خوشتان آمد؟

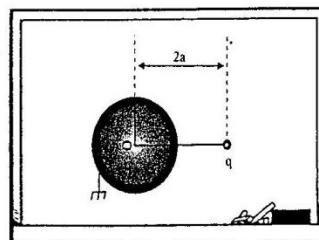
حال با توجه به مقادیر بارها و فاصله‌ها، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای  $Q$  را حساب می‌کنیم:

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{F}'' \Rightarrow \frac{-\frac{Q^2}{2}}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{\frac{3}{2}Q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 4a^2} = \frac{11Q^2}{288\pi\epsilon_0 a^2}$$

گزینه ۳ درست است. (توجه کردیم که  $\bar{F}'$  جاذبه و  $\bar{F}''$  دافعه بود) در ضمن در این مسئله اگه طراح دوست داشت، می‌توانست ~~می‌توانست~~ بگوید که بار  $Q$  چقدر باشد تا آب از آب نکون نخواهد یعنی نیروی برآیند صفر بشد، یعنی  $\bar{F}' = \bar{F}''$  بشد، یعنی مسئله خلی قشنگتر بشد، یعنی...

۲- بار نقطه‌ای  $q$  به فاصله  $a$  از مرکز یک کره رسانای زمین شده به شعاع  $a$  قرار گرفته است. نیروی وارد بر کره از طرف بار  $q$  برابر است با:

(مسئلۀ ۸۳)



$$\frac{-q^2}{18\pi\epsilon_0 a^2} \quad (4)$$

$$\frac{-2q^2}{9\pi\epsilon_0 a^2} \quad (5)$$

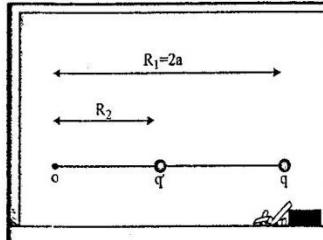
$$\frac{-q^2}{36\pi\epsilon_0 a^2} \quad (6)$$

$$\frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad (1)$$



اجازه بدین اینو من خودم حل کنم؛ چقدر تیپ سؤال‌های کنکور ارشد به هم شبیه است؟! مطابق شکل واسه بار  $q$ ، تصویرش را

به دست می‌آوریم؛ هم اندازه‌اش و هم مکانش را!



$$R_2 = \frac{a^2}{2a} \Rightarrow R_2 = \frac{a}{2}$$

$$q' = -q \times \frac{a}{2a} \Rightarrow q' = -\frac{q}{2}$$

۷- بندیک کره رسانا به شعاع  $a$  بار  $Q$  را اعمال می‌کنیم، یک بار نقطه‌ای  $Q$  دیگر را به فاصله  $2a$  از مرکز کره رسانا در نظر

(سراسری ۱۳۸۵)

$$\frac{43Q^2}{288\pi\epsilon_0 a^2} \quad (4)$$

$$\frac{11Q^2}{288\pi\epsilon_0 a^2} \quad (3)$$

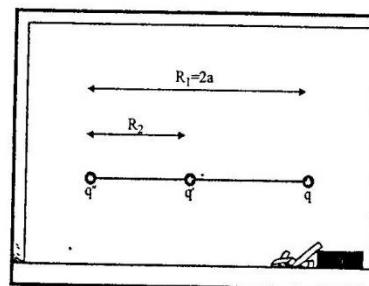
$$\frac{17Q^2}{144\pi\epsilon_0 a^2} \quad (2)$$

$$\frac{Q^2}{144\pi\epsilon_0 a^2} \quad (1)$$

حل:



سیستم معادل را چنین رسم می‌کنیم و از روابط تصویر کمک می‌گیریم:



$$\begin{cases} q' = -Q \frac{a}{2a} \Rightarrow q' = -\frac{Q}{2} \\ R_2 = \frac{a^2}{2a} \Rightarrow R_2 = \frac{a}{2} \end{cases}$$



استاد بخشید، من یه خرد گیج شدم ...  $q'$  که درسته چون تصویر بار  $Q$  است که برایش به دست می‌آوریم، اما "  $q''$  دیگر

از کجا آمد و آنجا نشست؟



به همین زودی فراموش کردید؟ ... صورت سؤال گفته کره رسانا دارای بار  $Q$  است. سیستم ایزوله است، یعنی باید مقدار بار  $Q$

در کره حفظ شود. برای این امر "  $q''$  آمده و مقدارش هم برابر است با:

$$q'' = Q - \left( \frac{-Q}{2} \right) \Rightarrow q'' = \frac{+3Q}{2}$$

حالا دیگه پیدا کردن نیروی بین  $q'$  و  $q$  مونده که مثل آب خورده:

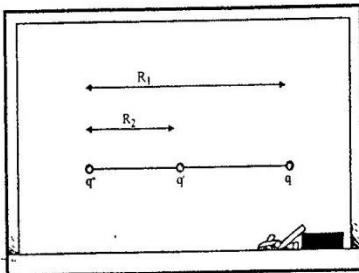
گزینه ۴ درست است.



$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{-q^2}{18\pi\epsilon_0 a^2}$$

راستی حالا که اینقدر بحث این نیروها شد گوش کنید تا مطلب جالبی را بگویم:

اگر کره هادی به شعاع  $a$ ، به پتانسیل  $V_0$  وصل شده بود و باز نقطه‌ای  $q$  در مجاورت آن بود سیستم چنین مدل می‌شد.



$$\begin{cases} q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0 \\ q' = -q \frac{a}{R_1} \\ R_1 R_2 = a^2 \end{cases}$$

حال اگر نیروی وارد بر کره و یا نیروی وارد بر  $q$  را بخواهد، به راحتی به دست می‌آید:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{qq'}{(R_1 - R_2)^2} + \frac{q''q}{R_1^2} \right]$$

$$\frac{qq'}{(R_1 - R_2)^2} = \frac{-qq''}{R_1^2} \rightarrow q'' = \dots$$

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

فهمیدی؟! یعنی با تعیین مقدار پتانسیل باتری « $V_0$ » می‌توان کاری کرد که نیرو برابر صفر شود.



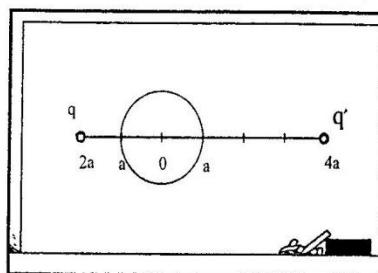
بله ... درسته ... ولی من احساس می‌کنم که اینو قبلاً هم داشتیم؛ برای اینکه هم‌کلاسی‌های من احساس نکنند که

وقتشان تلف شده، من یک جمله اضافه می‌کنم:

تا زه با توجه به روابط گفته شده، با تغییر مقدار پتانسیل  $V_0$  می‌توان نوع جاذبه یا دافعه پیدان نیرو را هم تعیین کرد.



۹- یک کره هادی به شعاع  $a$  زمین‌شده است. دو بار مثبت  $q$ ،  $q'$  به ترتیب در طرف چپ و راست کرده و به فاصله  $4a$ ،  $2a$  (سراسری) از مرکز کره و در روی یک قطر قرار دارند نیروی وارد بر  $q$ :



$$(2) \text{ دافعه است اگر } q' < \frac{28q}{144}$$

$$(3) \text{ جاذبه است اگر } q' < 4q$$

$$(1) \text{ جاذبه است اگر } q' < \frac{25q}{144}$$

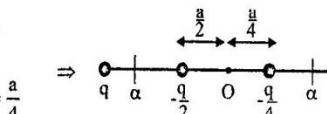
$$(4) \text{ دافعه است اگر } q' < \frac{144q}{25}$$

حل:



کره هادی را دور انداخته و با بارهای تصویر جایگزین می‌کنیم «تصویرهای  $q$ ،  $q'$ »؛ داستان این جوری می‌شود:

$$\begin{aligned} q &= \text{تصویر} = -\frac{qa}{2a} = -\frac{q}{2}, & R_2 &= \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} \\ q' &= \text{تصویر} = -\frac{q'a}{4a} = -\frac{q'}{4}, & R'_2 &= \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$



حالا نیروهای وارد بر  $q$  را می‌نویسیم، جاذبه‌ها یک طرف و دافعه هم یک طرف:

$$\frac{qq'}{36a^2} \square \frac{\frac{q}{2}q'}{\frac{81}{4}a^2} + \frac{\frac{q'}{4}q'}{\frac{225}{16}a^2}$$

دافعه      جاذبه

و جواب نهایی گزینه ۲ است.



۱۱- کره‌ای به شعاع  $a$  از جنس رسانا با پتانسیل  $v_0$  در فضا وجود دارد، این کره ایزوله است. حال بار مثبت  $q_1$  را در فاصله  $R_1 > a$  از مرکز کره قرار می‌دهیم. پتانسیل کره چقدر خواهد شد؟

(سراسری ۱۲۸۶)

$$\frac{q_1 + \frac{a}{R_1} q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (۱)$$

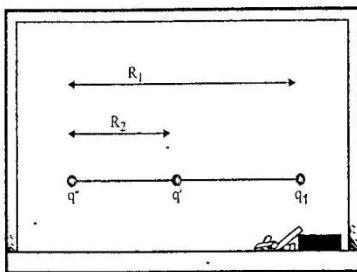
$$\frac{q_1 - \frac{a}{R_1} q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (۲)$$

$$v_0 + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (۳)$$

$$v_0 + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (۴)$$



سؤال بسیار زیبایی است؛ فرض کنیم که کره دارای پتانسیل صفر بود، در این حالت شکل بالا و تصویرهاشون این جوی می‌شوند:



$$R_2 = \frac{a^2}{R_1}$$

استاد،  $q'$  درست است. طبق حروفهای قبلی، تصویر  $q_1$  در داخل کره  $q'$  می‌شود که  $= -\frac{q_1 a}{R_1}$ ؛ اما  $-q'$  را جدا در مرکز



به خاطر ایزوله بودن دیگه... نباید مجموع بار کره تغییر کنه.

حالا خوب به حروفهای من کنید. الان طبق تئوری تصویر،  $q', q_1$  کره را در صفر هم پتانسیل کردند، اما بار  $-q'$  یک پتانسیل در سطح کره ایجاد می‌کند، به طوری که:

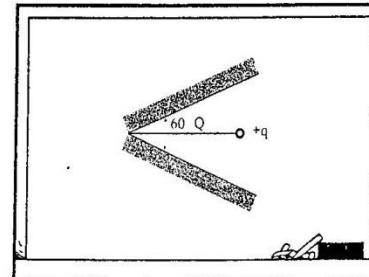
$$-q' = \frac{q_1 a}{R_1} \Rightarrow v_{(a)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{R_1}{a} \Rightarrow v_{(a)} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

۱۰- دو صفحه رسانا با یکدیگر زاویه  $60^\circ$  تشکیل می‌دهند. بار  $+q$  را از بینهایت به فاصله  $a$  از محل تلاقی دو صفحه و

(سراسری ۱۲۷۸)



روی نیمساز می‌آوریم، ارزی لازم جهت انجام این کار چقدر است؟



$$w = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( -2 + 2\sqrt{3} \right) \quad (۲)$$

$$w = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( +15 - \sqrt{3} \right) \quad (۴)$$

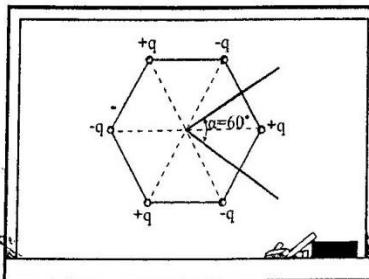
$$w = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( -5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \quad (۱)$$

$$w = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( -2.5 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \quad (۳)$$



باید هادی را دور انداشت و تصویرها را به دست آورد. می‌دانیم که تعداد تصاویر  $= 5$  که شکل تصاویر در پایین رسم شده

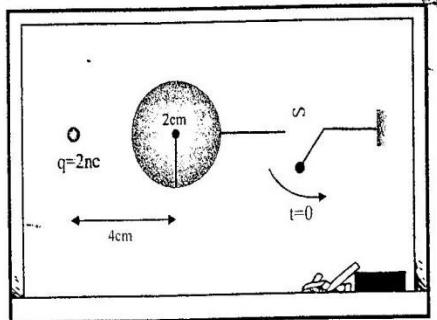
است. با توجهی به شکل، پتانسیل ناشی از یک بار تصویر را در محل بار اصلی (A) به دست می‌آوریم و سپس از رابطه  $w = qV_A$  حل مسئله تومه:



$$v_A = 2 \left( \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} \right) + 2 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}a} \right) + \left( \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2a)} \right) \rightarrow w = qV_A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left[ -2.5 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$$

پس گزینه ۳ درست است. علت اینکه من اینقدر راحت مسئله را حل کردم، به خاطر اینه که او لا در دبیرستان معلم هندسه خوبی داشتم و ثانیاً ایشون رو خیلی دوست می‌داشتمن روحش شادا البته ایشون زنده هستن...

۱۲- کره رسانایی از طریق کلید  $S$  به زمین ایده‌آل با پتانسیل صفر ولت متصل است. بار نقطه‌ای  $q = 2nc$  در مجاورت این کره در محل نشان داده شده در شکل قرار گرفته است. کلید  $S$  در زمان  $t = 0$  باز می‌شود. سپس بار نقطه‌ای  $q$  به آرامی به نقطه‌ای در بی‌نهایت منتقل می‌شود. پتانسیل کره پس از این فرایند چند ولت خواهد بود؟ (سراسری ۱۳۸۴)

 $-2.25 \times 10^{-4}$ 

۹۰۰

-450

۱

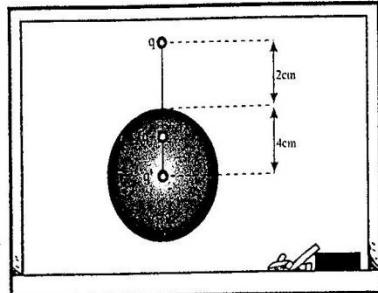
حل:



هنگامی که کره هادی زمین شده است، بار  $q'$  را در فاصله  $R_2$  از مرکز کره هادی تصویر می‌کند، به طوری که:

$$\begin{cases} q' = -q \frac{a}{R_1} = -2 \times \frac{2}{4} = -1nc \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} = \frac{4}{4} = 1cm \end{cases}$$

حال که کره دیگر به زمین وصل نیست (یعنی به هیچ جا وصل نیست) یعنی ایزوله است، پس کل بار روی آن صفر است. پس سیستم معادل به این شکل است:



پس بار  $V_{(a)}$  - این قدر پتانسیل روی کرده ایجاد کرد در حالتی که ما فرض کردیم کره زمین شده یا «پتانسیل صفر» است؛ حالا که خود کره هم به اندازه  $V_0$  پتانسیل دارد پس پتانسیل نهایی در سطح کره چنین می‌شود:

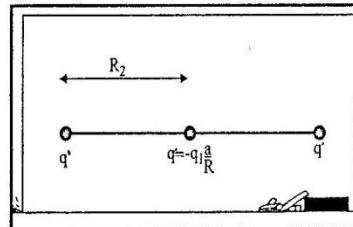
$$V_{(a)} = V_0 + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

پس گزینه ۲ درست است.



من یه جور دیگه مسئله رو حل می‌کنم که حدس می‌زنم برای بجهه‌ها قابل فهم‌تر باشد؛ چونکه حروف‌های من از جنس خود

بچه‌هاست! هنگامی که کره به باتری  $V_0$  وصل شود، بار  $(4\pi\epsilon_0 a V_0)$  را از باتری گرفته و پس از ایزوله شدن، این بار رویش ثابت می‌ماند. پس شکل معادل این گونه می‌شود:



به علت ایزوله بودن کرد:

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0 + q_1 \frac{a}{R_1}$$

بارهای  $q_1$  و  $q''$  که پتانسیل‌شان روی کرده هادی صفر است. پس فقط می‌ماند  $q'$ ؛ یعنی حل مسئله تتممه:

$$V_{(a)} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} = V_0 + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

آفرین! من اعتراف می‌کنم که حل شما از حل من قابل فهم‌تر بود؛ من هم یاد گرفتم؛ حالا کسی می‌توانه ساده‌تر به جواب برسه؟



من فکر کنم خودم بتونم؛ این تیپ کارها رو خیلی هم دوست دارم.

$V_{(a)} = V_0 \Rightarrow$  باز هیچ چیزی تغییری نمی‌کند  $\Rightarrow$  آنقدر دوره که باری تصویر نمی‌شود  $\Rightarrow$   $R_1 \rightarrow \infty$

گزینه ۲ درست است.



خوشحالم که اگر من بعیرم؛ شما راه منو چهبا بهتر از خودم ادامه خواهی داد...

من بک پیشنهاد دارم؛ چون یکی از اهداف ما کار تستی است، می‌توانستیم از اول مرکز حفره را بر مرکز کره رسانا منطبق



کنیم، این جویی کار ساده‌تر می‌شدا

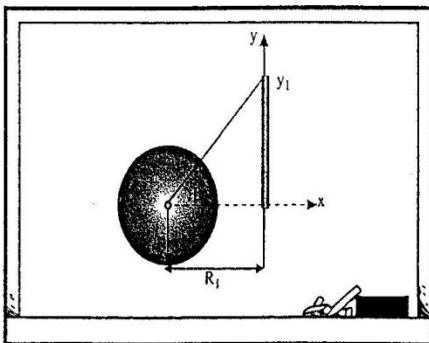
آفرین! بردن تست به بنیست کار بسیار شایسته‌ای است!



۱۴- بار یکنواخت  $\rho_\ell \left( \frac{c}{m} \right)$  روی محور  $y$  از  $y = 0$  تا  $y_1$  مفروض است. کره فلزی به شعاع  $a$  با پتانسیل صفر در



فاصله  $R_1$  از بار خطی مطابق شکل مفروض است. به طوری که طول بار خطی تحت زاویه  $\beta$  از مرکز کره دیده می‌شود. بار القایی درون کره کدام است؟



$$-\rho_\ell L \ln \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \quad (۱)$$

$$+ \frac{\rho_\ell}{a} \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \quad (۲)$$

$$+ a \rho_\ell \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \quad (۳)$$

$$- a \rho_\ell L \ln \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \quad (۴)$$



مسئله بسیار زیباست و ما بسیار زیباتر آن را حل خواهیم کرد.

بار  $dq$  را روی میله انتخاب کرده و تصویر این را در داخل کره می‌یابیم.

حالا هنگامی که  $R_1 \rightarrow \infty$  و  $q' \rightarrow 0$  ثابت می‌ماند، یعنی انگار بار  $-1nc$  در مرکز کره هادی باقی مانده پس پتانسیل در این حالت برابر می‌شود با:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{a} = 9 \times 10^9 \times \frac{-1 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-2}} = -450 \text{ V}$$

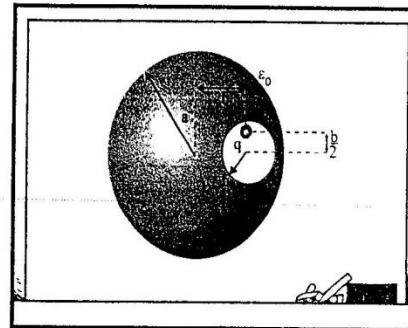
یعنی گزینه ۲ درست است.



۱۳- کره ایزوله به شعاع  $a$  از جنس رسانا با حفره‌ای کروی به شعاع  $b$  مطابق شکل زیر مفروض است. بار نقطه‌ای  $q$  را در

(سراسری ۱۲۸۶)

فاصله  $\frac{b}{2}$  از مرکز حفره فرار داده‌ایم، پتانسیل در مرکز حفره چقدر است؟



$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \quad (۵)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{2} \quad (۶)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (۷)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2b)} \quad (۸)$$



برای صفر شدن میدان درون هادی (که امری مهم و واجب است) بار  $q$  درون حفره، باری برابر با  $-q$  در سطح خارجی حفره و

باری به اندازه  $+q$  در سطح خارجی کره رسانا القای نماید. حال پتانسیل کل را با جمع آثار به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b} \quad (۹)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{b} \quad (\text{ناشی از بار نقطه‌ای } q) \quad (۱۰)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \quad (\text{ناشی از بار القایی در سطح خارجی کره رسانا})$$

پس گزینه ۴ درست است.



۱۵- کره‌ای به شعاع  $a$  از جنس رسانا با پتانسیل  $V_0$  در فضای آزاد مفروض است. این کره ایزوله است. حال بار  $q_1$  را به فاصله  $3a$  از مرکز این کره قرار می‌دهیم، به طوری که کل نیروی اعمالی بر آن صفر شود. مقدار پتانسیل  $V_0$  چقدر بوده است؟

$$\left( \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right)$$

(سراسری ۱۳۸۷)

$$\frac{q_1 - \frac{q_1}{3}}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\frac{q_1 + \frac{q_1}{3}}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\frac{51 \times 10^9}{64a} q_1$$

$$\frac{64 \times 10^9}{51a} q_1$$

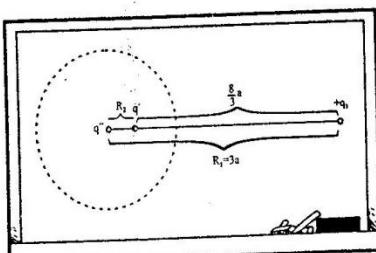
اولین چیزی که پس از خواندن صورت این سوال به ذهن شما می‌رسد؛ چیست؟



تئوری تصویر تئوری تصویر تئوری تصویر



پس مدل تصویری مسئله را رسم می‌کنیم:

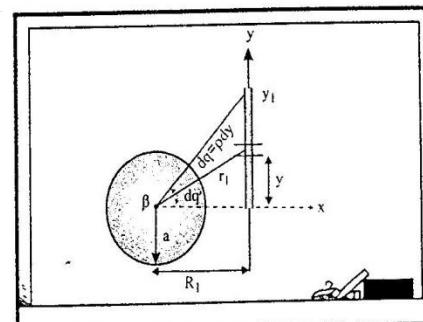


$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3} \\ q' = -q_1 \frac{a}{3a} = -\frac{q_1}{3} \end{array} \right.$$

به خاطر ایزوله بودن چنین داریم:

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0 + \frac{q_1}{3}$$

بار  $q'$  را جذب می‌کنه و بار  $q''$  را رفع می‌کنه؛ مسئله خواسته برآیندشان صفر شود، پس حل مسئله معلوم است



طبق تئوری تصویر می‌دانیم که اندازه بار تصویر این جوری می‌شه:

$$q' = \frac{-adq}{r_1} \Rightarrow dq' = \frac{-adq}{r_1}$$

$$dq' = -\rho_\ell dy \frac{a}{\sqrt{R_1^2 + y^2}} \Rightarrow q' = -\rho_\ell a \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{R_1^2 + y^2}}$$

$$q' = -\rho_\ell a \ln \left[ y + \sqrt{y^2 + R_1^2} \right] \Big|_0^{y_1} = -\rho_\ell a \left[ \ln \left( y_1 + \sqrt{y_1^2 + R_1^2} \right) - \ln R_1 \right]$$

از طرفی داریم:

$$\frac{y_1}{R_1} = \tan \beta \quad , \quad \cos \beta = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + y_1^2}}$$

$$q' = -\rho_\ell a \ln \left[ \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] = -\rho_\ell a \ln \left[ \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \right]$$

پس گزینه ۱ درست است.



کسی سریه سر گزینه‌ها بگذریم:

اگر  $\beta = 90^\circ$  بود، یعنی یک نیم خط باردار داریم که بارش به سمت  $\infty$  می‌رود، پس بار تصویر  $q'$  هم به سمت  $\infty$  می‌رود، پس یا گزینه ۱ درسته یا گزینه ۳.

اگر  $\alpha = 0^\circ$  باشد، آن گاه کرمای نداریم که بار درونش تصویر شود، پس تنها ۱ درست است.



یک حرف دیگر؛ چون بار اصلی مثبت است، باید بار تصویرش حتماً منفی شود، یعنی فقط گزینه ۱ درست می‌تواند باشد (اگر

کسی منظورم را نفهمید، درس تعیین علامت توابع لگاریتمی از دوره دبیرستان را مورو کنید) فصل خیلی خوبی بود، یک استراحت اساسی می‌کنیم و دوباره برمی‌گردیم.....

حالا می فهمم اینکه شما اینقدر تأکید می کردین مفاهیم را خیلی خوب یاد بگیرین. چی بود؟ آدم اگه اهل «فهم»

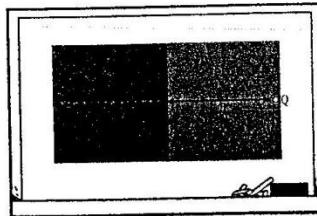
باشه، حل مسئله ۱۰ ساده و لذید می شده! من حل همین مسئله را توی یه کتاب دیگه دیدم؛ خیلی طولانی و عقیل نهم بود...



اگر تا حالا به عکس خودت توی جوی آب توجه کرده باشی یک تصویر مبهم دیده‌ای.

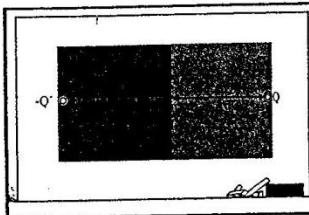


دو محیط با گزندیه‌های ۱۱ و ۱۲ مطابق شکل زیر داریم، برای تصویر بار Q:

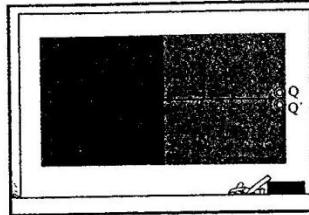


$$Q' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$$

الف - می توان هر دو محیط را  $\epsilon_1$  در نظر بگیریم و در فاصله d از مرز دو محیط بار  $(Q')$ - را قرار بدیم.



ب - می توان هر دو محیط را  $\epsilon_2$  در نظر گرفت و بار  $Q'$  را در محل Q قرار دهیم:



$$\frac{q_1 \frac{q_1}{3}}{4\pi \epsilon_0 \times \frac{64}{3} \mu^2} = \frac{q_1 \left( 4\pi \epsilon_0 a V_0 + \frac{q_1}{3} \right)}{4\pi \epsilon_0 \times 9 \mu^2}$$

$$\text{After simplification, we have : } V_0 = \frac{51 \times 10^9 q_1}{64 a}$$

پس گزینه ۲ درست!

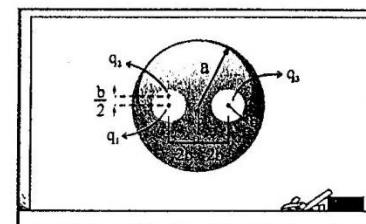


احساس می کنم که «تم» سوال‌ها در کنکور تکراری است.

بعنی تصویر گرفتم که حتماً یکبار دیگر از اول، خودم تمام این تست‌ها را حل کنم...



۱۶- داخل کرمای به شعاع a از جنس رسانا، دو حفره به شعاع‌های پکسان b (a > 2b) مطابق شکل مفروض است. بارهای  $q_1$  و  $q_2$  را در داخل حفره اول و بار  $q_3$  را در مرکز حفره دوم قرار می‌دهیم. الف) اندازه نیروی اعمالی  $q_3$  بر  $q_1$  (ب) اندازه نیروی اعمالی (سراسری ۱۳۸۷) بر  $q_1$  چقدر است؟



$$(1) \text{ الف) } \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 (4b)^2} \quad (2) \text{ الف) } \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 b^2} \quad (3) \text{ الف) صفر} \quad (4) \text{ الف) صفر}$$



در صفحه  کتاب خواندیم که «درون رسانا، از بیرونش ایزوله است». پس  $q_3$  نیرویی بر  $q_1$  وارد نمی‌کنه؛ و در صفحه

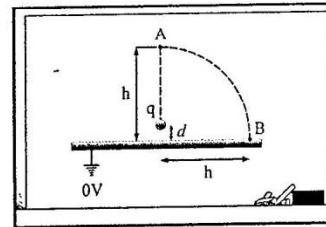
$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{q_1 q_2}{\pi \epsilon_0 b^2}$$

کتاب فیزیک ۳ دبیرستان دیدیم که:

پس گزینه ۴ درست است.



۱۷- بار نقطه‌ای  $q$  به فاصله بسیار کوچک  $d$  از یک صفحه رسانای نامحدود با پتانسیل صفر قرار گرفته است. اندازه میدان الکتریکی در نقطه A به فاصله  $h$  بالای صفحه در مقایسه با میدان نقطه B در فاصله  $h$  از پای عمود در صفحه افقی برابر است با: (سراسری ۱۳۸۷)



$$E_B = 2E_A \quad (1)$$

$$E_A = 2E_B \quad (2)$$

$$E_A = \sqrt{2} E_B \quad (3)$$

$$E_A = E_B \quad (4)$$



اگر کسی نفهمه که این مسئله به تصور مریوطه، از فرط پاکی جایش در بیش است؛ و اگر کسی بفهمه که به خاطر

بسیار کوچک بودن  $d$ ،  $q$  و تصویرش یک دوقطبی می‌سازند که A و B در فاصله دور از آن هستند، جای بهتری در بیش نسبیش خواهد شد!!

$$E_A = \frac{q(2d)}{4\pi\epsilon_0 h^3} \left( \frac{1}{2\cos 0^\circ} \hat{r} + \frac{0}{\sin 0^\circ} \hat{\theta} \right) \Rightarrow E_A = 2E_B$$

$$E_B = \frac{q(2d)}{4\pi\epsilon_0 h^3} \left( \frac{0}{2\cos 90^\circ} \hat{r} + \frac{1}{\sin 90^\circ} \hat{\theta} \right)$$

پس گزینه ۳ درست است.

اگر مرا متوجه به حرف تکراری نمی‌کردید، می‌گفتیم: «در صفحه  کتاب، توصیه شده بود که فرمول میدان الکتریکی دوقطبی را به خاطر بسیارید؛ بسیار هر آنچه گوید ناصح منتفق، بپذیر!»



به روی  استاد.

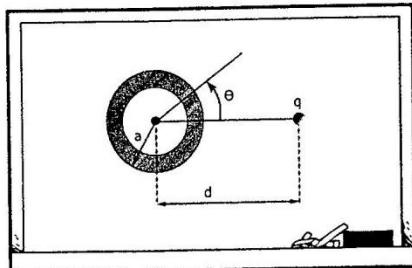
# تمرینات

## فصل

### نهم



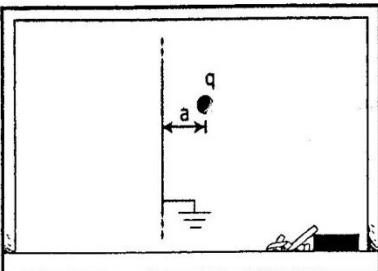
اگر بار  $q$  در فاصله  $d$  از مرکز یک پوسته کروی رسانا با شعاع خارجی  $a$  قرار گیرد ( $d > a$ ) چگالی بارهای سطحی روی جدار خارجی و داخلی پوسته به ترتیب:



- (۱) ثابت است، متناسب است با  $\theta$   
 (۲) متناسب است با  $\theta$   
 (۳) متناسب است با  $\theta$   
 (۴) صفر است، متناسب است با  $\theta$

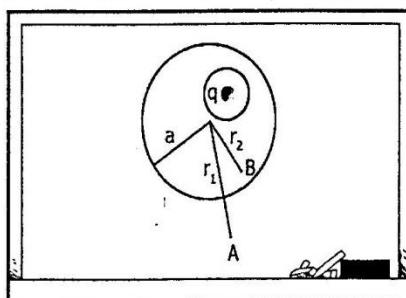
- (۱) ثابت است، متناسب است با  $\theta$   
 (۲) متناسب است با  $\theta$   
 (۳) متناسب است با  $\theta$   
 (۴) صفر است، متناسب است با  $\theta$

۵- بار  $q$  به فاصله  $a$  از صفحه رسانای نامحدودی که به زمین وصل شده است قرار دارد. کدام گزینه درست است؟



- (۱) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم دو برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار  $q$  و بار تصویری  $-q$  است.
- (۲) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار  $q$  و بار تصویری  $-q$  است هنگامی که خود انرژی مل  $-q$  از آن کم شود.
- (۳) انرژی الکترواستاتیکی این سیستم برابر انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار  $q$  و بار تصویری  $-q$  است.
- (۴) چون میدان الکتریکی در سمت چپ صفحه رسانا صفر است، انرژی الکترواستاتیکی این سیستم نصف انرژی الکترواستاتیکی سیستم بار  $q$  و بار تصویری  $-q$  است.

۶- در یک کره رسانای توپر به شعاع  $a$  مطابق شکل حفره‌ای به شعاع  $b$  (a < b) ابجاد کرده‌ایم و یک بار نقطه  $q$  در مرکز حفره قرار داده‌ایم.  $\phi_B$ ,  $\phi_A$  به ترتیب پتانسیل در نقاط B, A کدام‌اند؟ فاصله مرکز حفره تا مرکز کره رسانا  $d$  است.



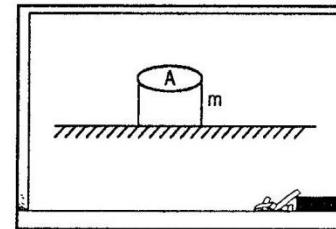
$$\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, \quad \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r_1+d)} \quad (1)$$

$$\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r_2-a)}, \quad \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r_1-a)} \quad (2)$$

$$\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (3)$$

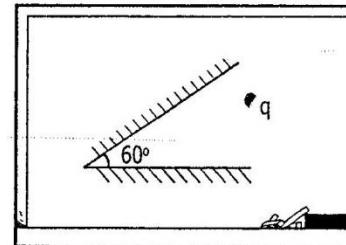
$$\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right), \quad \phi_A = \frac{q}{3\pi\epsilon_0 r_1} \quad (4)$$

۷- قرص یکنواخت نازک فلزی بزرگی روی صفحه رسانای نامحدودی قرار دارد. در ابتدا قرص و صفحه بدون بارند و سپس به تدریج بار اضافه می‌شود. چگالی بار الکتریکی صفحه چقدر باشد تا قرص از صفحه جدا شود؟ (جرم قرص،  $A$  مساحت قاعده قرص و  $q$  شتاب جاذبه است).



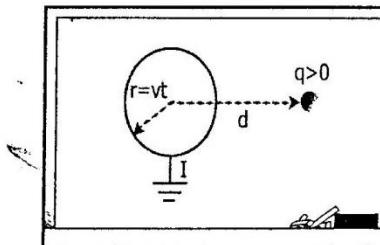
$$\left(\frac{\epsilon_0 mg}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1) \quad \left(\frac{\epsilon_0 mg}{4A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2) \quad \left(\frac{\epsilon_0 mg}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3) \quad \left(\frac{2\epsilon_0 mg}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

۸- برای یافتن پتانسیل الکترواستاتیک بین دو صفحه هادی که با یکدیگر زاویه  $60^\circ$  می‌سازند به چند بار تصویری نیاز داریم؟



12 (۱) 11 (۲) 6 (۳) 5 (۴)

۹- بار الکتریکی مشت  $q$  در فاصله  $d$  از مرکز یک کره رسانایی که متصل به زمین است، قرار دارد. اگر شعاع کره به طور خطی با سرعت  $v$  افزایش یابد ( $r = vt$ ), شدت جریان بین زمین و کره رسانا صفر و جهت جریان کدام است؟ (توجه: در این مسئله همواره  $v > 0$  فرض شده است؛ در ضمن جهت جریان را جهت حرکت بارهای مشت فرض کنید).



$$\frac{qv}{d} \quad (1) \quad \text{و به سمت زمین است.}$$

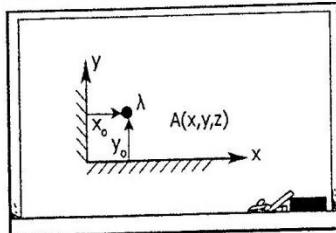
$$\frac{qv}{r} \quad (2) \quad \text{و به سمت زمین است.}$$

$$\frac{qv}{d} \quad (3) \quad \text{و به سمت کره است.}$$

۹- در فضای میان دو صفحه رسانای عمود بر هم میله باردار نازک بسیار طویلی با چگالی یکنواخت  $\lambda$  موازی فصل مشترک دو صفحه قرار دارد. فاصله میله از دو صفحه مطابق شکل است. پتانسیل الکتریکی دو صفحه صفر است. پتانسیل الکتریکی در نقطه A با مختصات  $(x, y, z)$  در بین دو صفحه کدام است؟

$$r_2^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2, r_1^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$(r_4^2 = (x + x_0)^2 + (y + y_0)^2, r_3^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2)$$



$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (1)$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \quad (3)$$

۱۰- بار نقطه‌ای q به فاصله  $2a$  از مرکز یک کره رسانای زمین شده به شعاع a قرار گرفته است. نیروی وارد بر کره از طرف بار q برابر است با:

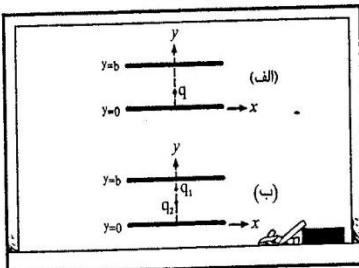
$$\frac{-q^2}{18\pi\epsilon_0 a^2} \quad (1)$$

$$\frac{-2q^2}{9\pi\epsilon_0 a^2} \quad (2)$$

$$\frac{-q^2}{36\theta\epsilon_0 a^2} \quad (3)$$

$$\frac{-q^2}{9\pi\epsilon_0 a^2} \quad (4)$$

۱۱- دو صفحه رسانای موازی و نامتناهی که به پتانسیل صفر ولت متصل شده‌اند، همانند شکل مفروض‌اند. در شکل «الف» بار  $2C$  در نقطه  $(0, a, 0)$  قرار گرفته است و کل بار القا شده روی صفحه  $y=0$  برابر  $y = 0$  است. اگر نظیر شکل «ب» بار نقطه‌ای  $q$  در فاصله  $R$  از مرکز کره قرار دارد. پتانسیل الکتریکی نقطه A کدام است؟



$$-\frac{13}{4} \quad (1)$$

$$-\frac{7}{4} \quad (2)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (4)$$

۱۲- به یک کره رسانا به شعاع a، بار Q را اعمال می‌کنیم. یک بار نقطه‌ای Q دیگر را به فاصله  $2a$  از مرکز کره رسانا در نظر می‌گیریم. اندازه نیروی وارد بر این بار نقطه‌ای برابر است با:

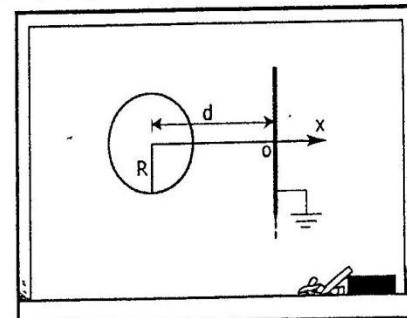
$$\frac{43Q^2}{288\pi\epsilon_0 a^2} \quad (1)$$

$$\frac{11Q^2}{288\pi\epsilon_0 a^2} \quad (2)$$

$$\frac{17Q^2}{144\pi\epsilon_0 a^2} \quad (3)$$

$$\frac{Q^2}{144\pi\epsilon_0 a^2} \quad (4)$$

۷- استوانه رسانای طویلی که دارای بار الکتریکی به چگالی  $\lambda$  کولن در واحد طول خود است، موازی صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. فاصله محور استوانه از صفحه رسانای  $d$  و شعاع استوانه  $R$  است. صفحه رسانا منطبق بر صفحه  $x=0$  است. چگالی بار الکتریکی سطحی در روی صفحه رسانا در نقطه‌ای به مختصات  $(0, y, z)$  کدام است؟

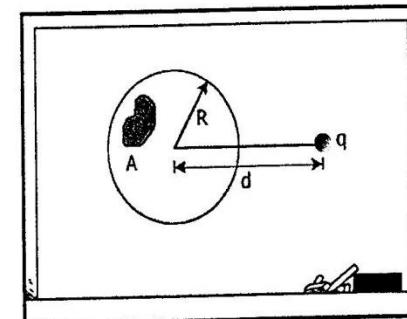


$$-\frac{\lambda R}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\frac{-\lambda d}{\pi(R^2 + y^2 + z^2)} \quad (2)$$

$$\frac{-\lambda d}{\pi(d^2 + y^2 + z^2)} \quad (3)$$

۸- یک قطعه فلزی A در داخل یک کره هادی توخالی به شعاع R قرار داده شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله  $R$  از مرکز کره قرار دارد. پتانسیل الکتریکی نقطه A کدام است؟

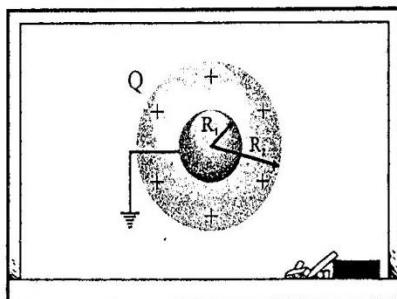


$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)} \quad (2)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (3)$$

۱۸- در فضای خالی بار  $Q$  به طور یکنواخت بر روی کره‌ای به شعاع  $R_2$  پخش شده است. این کره، کره رسانایی به شعاع  $R_1$  را که زمین شده است احاطه می‌کند. میدان الکتریکی در فضای بین دو کره برابر است با:

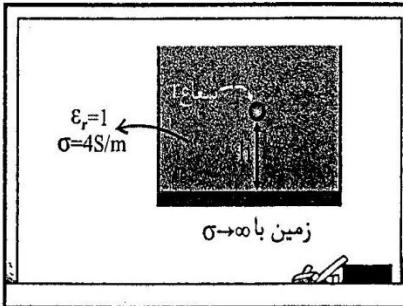


$$E_r = -\frac{\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

۱۹- یک کره رسانایی کامل به شعاع  $r$  همانند شکل در ارتفاع  $h$  از یک زمین رسانایی کامل واقع شده است، به قسمی که  $h \ll r$ . فرض کنید محیط اطراف کره با مایعی رساناً با  $\sigma = 4\frac{S}{m}$  پر شده باشد. اگر توسط یک باتری اختلاف پتانسیل کره

نسبت به زمین در سطح یک ولت نگهدارشده شود، توان تلف شده در مایع از کدام رابطه زیر به دست می‌آید؟



$$\frac{16\pi}{r + 2h} \quad (1)$$

$$\frac{8\pi}{r + 2h} \quad (2)$$

$$\frac{16\pi}{r + 2h} \quad (3)$$

$$\frac{8\pi}{r + 2h} \quad (4)$$

۲۰- بار نقطه‌ای  $q$  در فاصله  $z$  از مرکز کره‌ای رساناً به شعاع  $a$  قرار دارد. نیروی که بار نقطه‌ای بر کره رسانای بدون بار وارد می‌کند برابر است با:

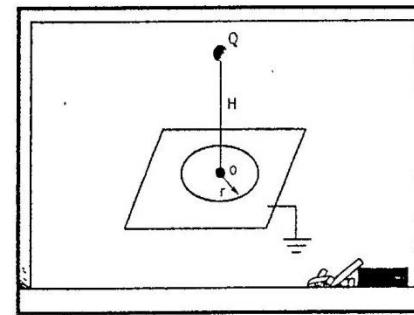
$$\frac{aq}{4\pi\epsilon_0 r(r^2 - a^2)} \quad (1)$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)} \quad (2)$$

$$\frac{raq^2}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)^2} \quad (3)$$

صفر

۲۱- بار الکتریکی نقطه‌ای  $Q$  را از بینهایت دور به آرامی به سمت یک ورقه هادی مسطح و متصل به زمین و بینهایت عریض و طویل نزدیک ساخته و در فاصله قائم  $H$  از آن نگه می‌داریم (طبق شکل). توزیع شعاعی چگالی سطحی ( $r_s$ ) بار القایی روی سطح بالایی این ورقه کدام است؟



$$\frac{3QH}{2\pi(r^2 + H^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (1)$$

$$\frac{-QHr}{\pi(r^2 + H^2)^2} \quad (2)$$

$$\frac{-QH}{\pi^2 r(r^2 + H^2)} \quad (3)$$

$$\frac{-QH}{2\pi(r^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

۲۲- بار نقطه‌ای  $Q$  به فاصله  $x$  از یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد. انرژی الکترواستاتیکی این سیستم (صرف نظر از خود انرژی) کدام است؟

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x} \quad (1)$$

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 x} \quad (2)$$

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 x} \quad (3)$$

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 x} \quad (4)$$

۲۳- یک بار  $q$  در فاصله  $z$  از مرکز کره‌ای رساناً که به زمین متصل است، قرار دارد. مقدار کار لازم برای بردن این بار به بینهایت چقدر است؟ ( $r > z$  و شعاع  $a$  است).

$$\frac{q^2 a}{8\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)} \quad (1)$$

$$\frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - r^2)} \quad (2)$$

$$\frac{q^2 a}{8\pi\epsilon_0 (a^2 - r^2)} \quad (3)$$

$$\frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)} \quad (4)$$

۲۴- بار نقطه‌ای  $Q$  به فاصله  $D$  از یک صفحه رسانای تخت نامتناهی قرار دارد. (صفحه رساناً به زمین اتصال دارد). نیروی وارد بر صفحه از طرف بار نقطه‌ای چقدر است؟

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 D^2} \quad (1)$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \quad (2)$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \quad (3)$$

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 D^2} \quad (4)$$